ESTE MODESTO LIBRO REFLEJA

EL CONTENIDO DE LAS CLASES TEORICAS

DE ANALISIS MATEMATICO I

DICTADAS DURANTE MI ACTIVIDAD DOCENTE

EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE

Dedicado a La Docencia y a todos quienes la ejercen con amor:

Con esta sublime frase del Padre de la Patria.

Dijo Don José de San Martín:

"La Educación es MAS importante que los ejércitos para la Independencia de los Pueblos"

Agradezco:

A mis tres hijos, que manifestaron su alegría y apoyo cuando les participé de la idea de actualizar mis apuntes de clases para hacer este humilde resumen con mis clases teóricas de Analisis Matemático I.

A mi esposa, que me permitió dedicar muchísimas horas en este trabajo desatendiendo tareas de colaboración en casa.

A mis alumnos de los numerosos cursos que me alentaron para que plasmara en este trabajo mis clases teóricas.

A Dennis, mi ex alumno y amigo que en encuentros casuales por Neuquén me recordaba la tarea prometida y colaboró con su amplio conocimiento informático entre otras ayudas, a desempolvar mis viejos disquetes que estaban en Word Perfect para que pudiera llegar finalmente a este PDF actual.

Introducción al concepto de función - Producto cartesiano

Como concepto previo al de función, decimos que, dados dos conjuntos, A y B, se define el producto cartesiano A x B, al conjunto de todos los pares ordenados, de manera que la primera componente del par pertenece al conjunto A, y la segunda componente pertenece al conjunto B.

$$A \times B = \{ (x,y) / x \in A \wedge y \in B \}$$

Como ejemplo simple: Si $A = \{ 1 , 2 , 4 \}$ y $B = \{ 1 , 8 \}$

$$A \times B = \{ (1,1) ; (1,8) ; (2,1) ; (2,8) ; (4,1) ; (4,8) \}$$

Conforme la definición resulta en general, que es $A \times B \neq B \times A$, por lo que no es conmutativo.

Tiene también sentido, y se usa habitualmente aplicando la definición de producto cartesiano, expresar el producto de un conjunto sobre si mismo, como: A X A, B X B, etcétera, con el mismo concepto de que si se tratara de dos conjuntos diferentes.

Relaciones - Relaciones binarias

A partir de dos conjuntos cualesquiera A y B definimos relación entre los conjuntos A y B, a cualquier subconjunto del producto cartesiano A X B. Es decir, que todos y cada uno de los subconjuntos de A X B, constituyen una relación entre A y B. Lo llamamos R o r indistintamente.

En símbolos: R: relación entre A y B $\Leftrightarrow$ $R \subseteq A \times B$.

Si se trata del producto cartesiano sobre un único conjunto A, podemos definir una relación en el mismo conjunto A, si es un subconjunto de A X A.

Lo expresamos como: R: relación en A $\Leftrightarrow$ $R \subseteq A \times A$.

Lo definido antes es válido para cualesquiera sean los elementos que componen cada conjunto, pero nos interesa en especial tratar los conjuntos numéricos, como pueden ser los de los naturales N, los enteros Z, los racionales Q, y muy particularmente los reales R.

Dada la especial aplicación que tienen en la matemática, en física, y en todas las ramas de las ciencias en general, como asimismo en numerosas situaciones reales, es que interesa especialmente considerar las relaciones entre conjuntos numéricos, que llamamos relaciones binarias.

Relación inversa

Si r es una relación entre los conjuntos A y B, se llama relación inversa de r, que se simboliza con r^{-1} a la relación entre B y A, de forma que se cumple: $r^{-1} = \{ (y,x) / (x,y) \in r \}$

Algunos ejemplos;

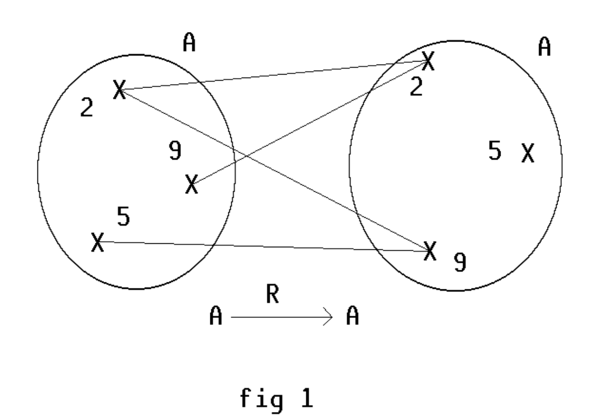


fig 1

a) Considerando el conjunto A: A = { 2 , 5 , 9 }, un ejemplo de relación binaria para el conjunto A, podría ser r, graficada en la (Fig. 1) y simbolizada

r = { (2,2) ; (2,9) ; (5,9) ; (9,2) } , ya que r ⊂ A X A

Esta relación r está dada en el conjunto A, siendo otra forma de simbolizarla:

r : A ———> A

b) En el conjunto N de los números naturales, se busca encontrar la expresión que determine el número que sea el triple de cada elemento de ese conjunto. A esta relación, la podremos llamar f, y será de N en N, pudiendo expresarla como: f: N ——> N (fig 2),

e indicarla de varias maneras diferentes

i) f / f(x) = 3 x $x \in N$
ii) y = 3 x $x \in N$
iii) f: N ———> N / $\forall$ x $\in$ N : f(x) = 3 x

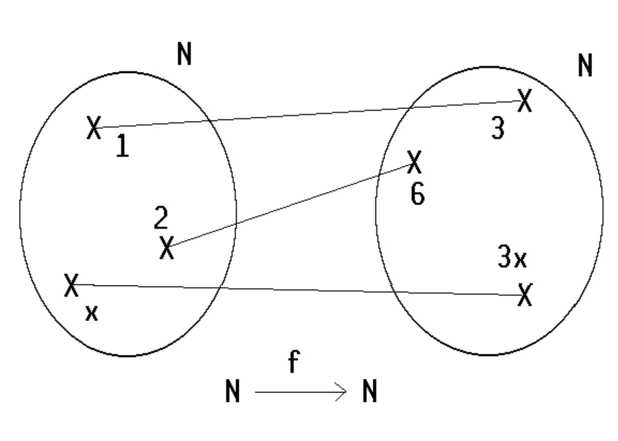


fig 2

c) En el conjunto R de los números reales, queremos ahora indicar la expresión del número que sea la raíz cuadrada de cada elemento de este conjunto. Si llamamos a esta nueva relación g, que ahora lo será de R en R, podemos simbolizar como antes: g: R ———> R,

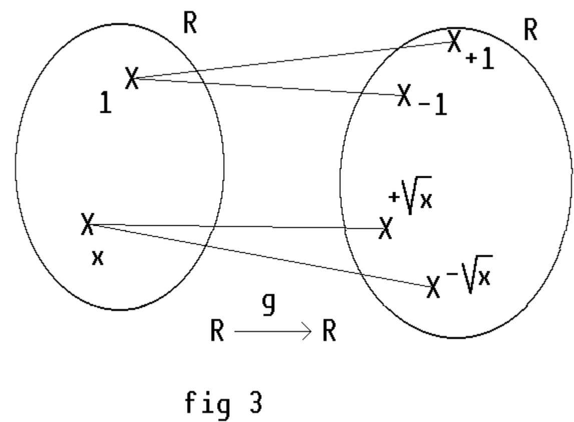


fig 3

y en forma análoga:

i) g / g(x) = $\sqrt{x}$ $x \in R$
ii) g = $\sqrt{x}$ $x \in R$
iii) g : R ——> R / $\forall$ x $\in$ R : g(x) = $\sqrt{x}$ (Fig. 3)

En el ejemplo b), para todos y cada uno de los elementos del conjunto N, existe un elemento, único, del mismo conjunto que responde a la relación "es el triple de".

En el caso c), para los números del conjunto R, que sean menores que cero (negativos), no existe elemento dentro del mismo conjunto que responda a la relación "raíz cuadrada de". Además, por el doble signo que lleva implícita la

operación de la radicación, para todo número real positivo x, hay dos respuestas válidas: $+\sqrt{x}$ y $-\sqrt{x}$,con lo que se ratifica que no hay elemento único que la satisface.

Relaciones funcionales - Función

En adelante, salvo que se indique lo contrario, nos vamos a referir únicamente a las relaciones binarias, considerándolas en general para el producto cartesiano R X R, expresando entonces que serán "relaciones de R en R".

Dentro del conjunto de esas relaciones binarias, a su vez, tendremos únicamente en consideración a aquellas en las que a cada elemento del primer conjunto, le corresponde un único elemento del segundo conjunto. A estas relaciones para las que se verifican la condición antedicha se las llama relaciones funcionales o simplemente funciones.

De las relaciones presentadas más arriba, solamente a la del ejemplo b) f = 3 x, le corresponde la idea de función así expresada.

Algunos sinónimos corrientes de este concepto son, entre otros: *relación funcional, función, función uniforme, aplicación, transformación, correspondencia, y otras.*.

Evidentemente, de las definiciones dadas, las relaciones funcionales son un subconjunto de las relaciones binarias, por lo que están incluidas en éstas. Toda relación funcional es una relación binaria, mientras que no toda relación binaria es una relación funcional.

Una denominación para distinguir a las relaciones binarias que no son relaciones funcionales es llamarlas relaciones multiformes, y también funciones multiformes, aunque es preferible no utilizar el vocablo "función" para otras relaciones que no sean las relaciones funcionales.

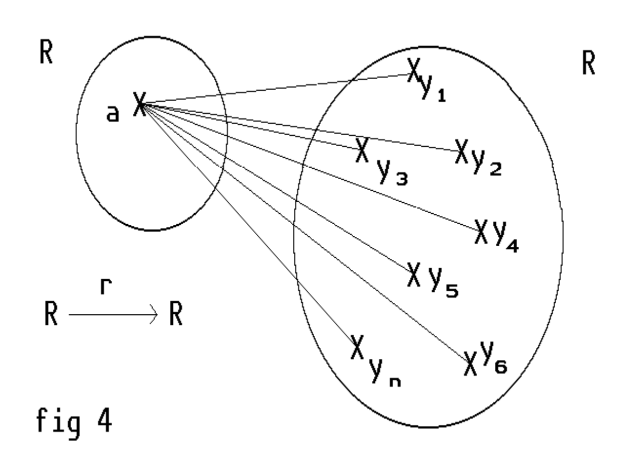


fig 4

En los casos dados, a) y c), son relaciones multiformes.

Existen importantes relaciones multiformes, como ser las ecuaciones de rectas paralelas al eje de las ordenadas.

Su expresión genérica es x = C. (Fig. 4)

Es un clásico ejemplo de relación multiforme, sería expresada como:

$r : a \longrightarrow R \;/\; x = a \;:\; f(x) = R$

o, también: $r = \{ (a,y) \;/\; y \in R \}$

Antes de entrar a la definición más formal y rigurosa de función, es importante precisar que no necesariamente todas las relaciones funcionales se escriben como una expresión algebraica, aunque sea esta última la forma en que corrientemente se presentan.

Un ejemplo concreto lo constituye la relación funcional:

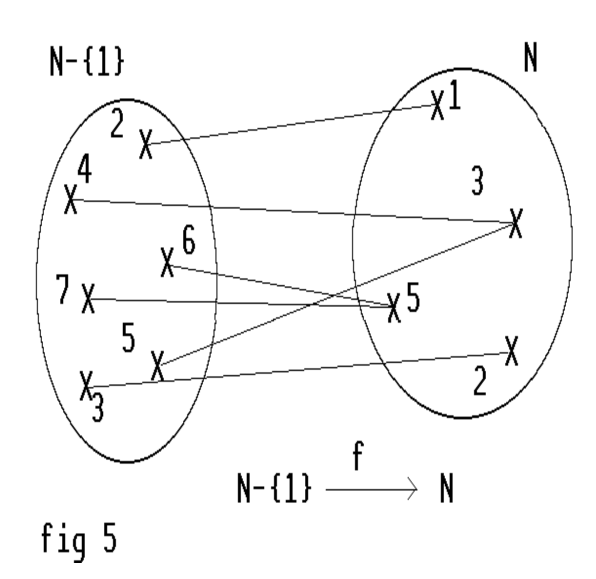


fig 5

f: N – { 1 } —> N / f: "número primo inmediato menor que"

o también:

f: x ∈ N – { 1 } ; y ∈ N ∧ y = "mayor de los números primos menores que x"

La función estará compuesta por los pares: (2,1) ; (3,2) ; (4,3) ; (5,3) ; (6,5) ; (7,5) ; (8,7) ; (9,7) ; (10,7) ; (11,7) ; (12,11) ; (13,11) etcétera. Vemos que el 1 ∈ N, no tiene "número primo inmediato menor que", dentro de N, y es debido a ello que se debió definir de N – { 1 } en N, para que fuera efectivamente una función (Fig. 5).

La relación inversa de una relación funcional no es necesariamente una relación funcional, lo que vemos con este simple ejemplo:

Sea el conjunto A = { 1, 5,11 }, y

f : A ———> A , definida por

f = { (1,5) ; (5,5) ; (11,1) } que es relación funcional o sea función

a su vez, como se ha definido, se ve que

r = { (5,1) ; (5,5) ; (1,11) }

es relación inversa de la función f, pero no es relación funcional.

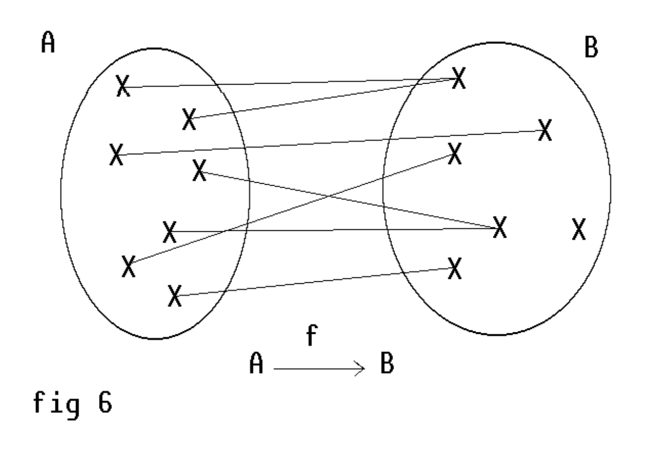


fig 6

Definición formal del concepto de función

Dados dos conjuntos A y B, una <u>función f del conjunto A en (o sobre) el conjunto B</u>, es una correspondencia tal que a <u>cada</u> elemento del conjunto A, le asocia un <u>único</u> elemento del conjunto B.

Expresándolo en símbolos: f : A ———> B .

La definición contiene dos requisitos esenciales que es fundamental interpretar (Fig. 6):

a) Todos y cada uno de los elementos del conjunto A (primer conjunto), tienen su correspondiente en el conjunto B (segundo conjunto).

b) Cada elemento del conjunto A tiene un único correspondiente en el conjunto B (aunque un elemento del B puede ser el correspondiente de más de un elemento del A).

Otra expresión de la definición de función

Una relación f entre elementos de un conjunto A y elementos de un conjunto B es una función de A en B, si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $\forall x \in A , \ \exists y \in B \ / \ (x,y) \in f$
ii) $(x,y) \in f \ \wedge \ (x,z) \in f \ \Rightarrow \ y = z$

Con ejemplos simples interpretamos la definición:

a) Sean los conjuntos, A = { m , n , p } ; B = { r , s } , y las relaciones: f, g, h, definidas de A en B:

f = { (m,r) ; (n,s) ; (p,r) } (es función, cumple definición)
g = { (m,s) ; (p,r) } (no es función, no cumple i): n no tiene su correspondiente)
h = { (m,r) ; (m,s) ; (n,r) ; (p,s) } (no es función, no cumple ii): hay distintos correspondientes de m)

Otra forma de representar las relaciones entre conjuntos, sería en el sistema de ejes cartesianos, en este caso, para f, g y h (Fig. 7)

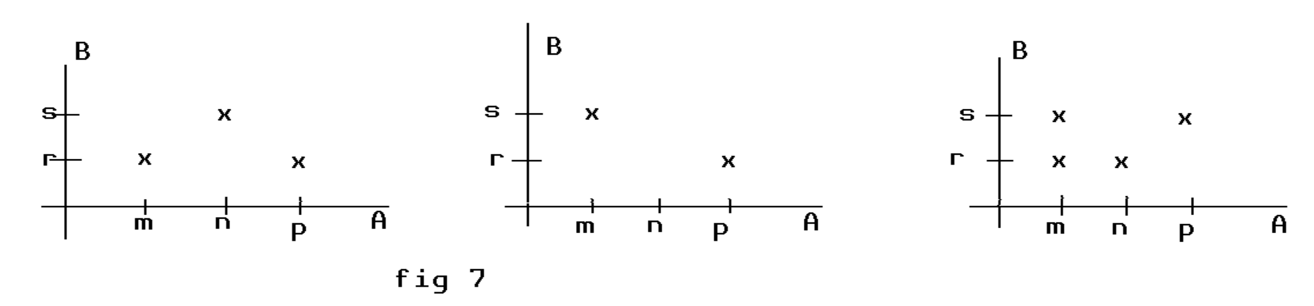


fig 7

Otros ejemplos: b) Si ahora los conjuntos son:

A = { alumnos que cursan Análisis I en este año } , y B = { $y \ / \ y \in N \wedge 15 < y < 95$ }

Podremos expresar una relación entre los conjuntos de esta manera

f : A ————> B : $x \in A$, $y \in B$ / y "es la edad de" x

La relación f es claramente una relación funcional, ya que todos los alumnos tienen alguna edad, y cada uno tiene una sola edad.

La definición de función no queda invalidada por el hecho de que dos o más distintos elementos, "alumnos" tengan su misma correspondiente "edad". Lo requerido es que cada alumno tiene "una" edad.-

Lógicamente el intervalo de edades entre 15 y 95 estará adecuado a los años que tengan el conjunto de alumnos inscriptos.

c) Consideramos ahora esta propuesta interesante dentro de los ejemplos no numéricos:

A = { alumnos de la UBA } ; B = { alumnos de la UBA y sus hermanos }

Si planteamos una relación, desde ya arbitraria, que fuera:

$g : A \longrightarrow B : x \in A,\ y \in B \ /\ y \neq x \wedge y$ "es hermano de" x

Bastaría que uno solo de los alumnos de la UBA, como elemento del primer conjunto fuera hijo único, para que g no fuera función, ya que de ser así, no todos los elementos del conjunto A tendrían su correspondiente en B. No se cumpliría entonces la condición i).

Si se corrige la definición de la relación g, llamando h ahora a

$$h : A \longrightarrow B : x \in A,\ y \in B \ /\ y = \begin{cases} = x, \text{ si } x \text{ es hijo único} \\ = \text{es hermano de } x, \text{ si } x \text{ no es hijo único.} \end{cases}$$

Ahora, todos los elementos del conjunto A tienen su correspondiente en B, pero si uno solo de los alumnos tuviera más de un hermano, tampoco sería h función, ya que a un mismo elemento del primer conjunto le correspondería más de uno en el segundo. No cumple aquí la condición ii).

Si se redefine nuevamente la relación, que llamamos f, de esta manera:

$$f : A \longrightarrow B : x \in A,\ y \in B \ /\ y = \begin{cases} = x, \text{ si } x \text{ es hijo único} \\ = \text{es el hermano de más edad de } x \text{ si } x \text{ no es hijo único} \end{cases}$$

Finalmente, esta relación f es efectivamente una función de A en B, ya que se cumplen todas las condiciones requeridas en la definición.

Hemos dicho ya que la mayoría de las funciones con que se desarrolla el estudio del Análisis Matemático son de R en R, siendo R el conjunto de los números reales.

En particular, los capítulos de sucesiones y series, serán considerados de N en R, con N el conjunto de los números naturales.

<u>Dominio - Rango - Imagen</u>

Definimos <u>dominio</u> de una función, designándolo con D_f o con D (f), al primer conjunto (que hemos llamado A en nuestros ejemplos) para el cual se cumple que todos y cada uno de sus elementos tienen su correspondiente en el segundo conjunto (que hemos llamado B).

Llamaremos <u>rango</u> o codominio de una función, usualmente llamado R_f o R (f), al segundo conjunto (o conjunto B), es decir a aquel donde se encuentran los correspondientes del primer conjunto, donde la función toma sus valores.

Designaremos como <u>imagen</u> o recorrido de una función, identificándolo como I_f o como I (f), al conjunto formado por todos los correspondientes a algún elemento del primer conjunto.

En símbolos: $D_f = A$

$R_f = B$

$I_f = \{ y \,/\, y \in B \wedge \exists\, x \in A \,/\, (x,y) \in f \}$; siendo, por lógica, $I_f \subseteq R_f$.

Gráfica de una función

La representación gráfica de una función de R en R más corriente, se desarrolla en el plano, a través del sistema de coordenadas cartesianas, con representación del dominio en el eje x de las abscisas y el rango en el eje y de las ordenadas.

De esta manera, la gráfica queda formada por los puntos (x;y) del plano, para los que (x;y) $\in$ f , o lo que es lo mismo, para los que se cumple y = f(x). (Fig. 8)

Esta gráfica resultará, según las características de la función, compuesta por un conjunto finito de puntos aislados, un conjunto infinito de puntos aislados, una línea de trazo continuo o una combinación de puntos aislados y trazos continuos.

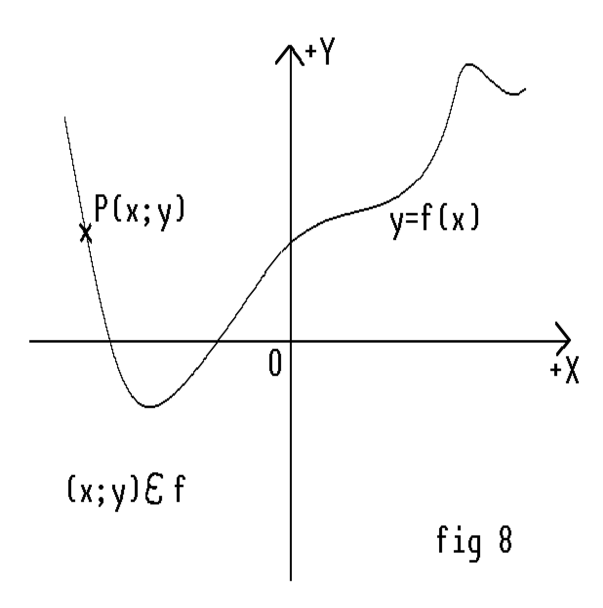


fig 8

El plano en su conjunto, llamado R^2 sería la representación del producto cartesiano R X R.

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Una función se dice que es inyectiva o "uno a uno", si se verifica la condición de que cada uno de los elementos de la imagen sea originado en un único elemento del dominio. Esto es equivalente a decir que a elementos diferentes del dominio le corresponden elementos diferentes de la imagen.

En símbolos, lo expresamos de dos maneras:

f : A ———> B es inyectiva, si y solo si, $\forall a \in A \wedge \forall b \in A : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ o, lo que es equivalente:

f : A ———> B es inyectiva, $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A \wedge \forall b \in A : a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

La definición determina claramente que existiendo un solo par de valores $a \neq b$, que verifiquen que f(a) = f(b), es suficiente para señalar que la función no es inyectiva.

Se dice que una función es sobreyectiva o suryectiva o simplemente "sobre", si la imagen de la misma coincide con el rango: I (f) $\equiv$ R (f). En símbolos

f : A ———> B es sobreyectiva, si y solo si,

$\forall y \in B , \exists\, x \in A \,/\, (x,y) \in f$

Para una función definida de A sobre B, decimos que es una función biyectiva o "uno a uno y sobre", si y solo si es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva. Lo expresamos simbólicamente como

f : A ———> B es biyectiva, $\Leftrightarrow$ se cumple simultáneamente:

i) $\forall a \in A, \forall b \in B : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
ii) $\forall y \in B, \exists\, x \in A \ / \ y = f(x)$ o $(x,y) \in f$

Se debe tener presente que no todas las funciones son disyuntivamente inyectivas, sobreyectivas o biyectivas, sino que también existen aquellas que no cumplen ninguna de las caracterizaciones mencionadas. Por ejemplo:

sea la función f : A ————> B, siendo los conjuntos:

$A = \{ m , n , p \}$ y $B = \{ \alpha , \beta , \delta \}$, y la función $f = \{ (m,\alpha) ; (n,\beta) ; (p,\alpha) \}$

Se verifica que f es efectivamente una función, pero no se cumple para ella la ni condición de inyectividad ni de sobreyectividad, y por ende tampoco es biyectiva (con que no se cumpliera una de ellas sería suficiente para negar la biyectividad).

Relaciones inversas - funciones inversas

Ampliamos el concepto sobre relaciones y sus inversas: A partir de una relación r de A sobre B r : A ———> B, ya se ha definido la relación inversa r^{-1}, que es lógicamente ahora de B sobre A r^{-1} : B ———> A, de manera que se verifica la condición:

r^{-1} ; relación inversa de r $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in A , y \in B : (x,y) \in r \wedge (y,x) \in r^{-1}$

Interesa en especial analizar las características que presentan las relaciones inversas de las relaciones funcionales.

Se buscará determinar, para distintas relaciones funcionales, si las correspondientes relaciones inversas son también funciones.

En primer lugar, consideramos una función f no inyectiva. (Fig. 9)

En ella, existen, por lo menos, un par de valores del dominio x, $x_1 \neq x_2$ para los que la imagen $y = f(x_1) = f(x_2)$, lo que caracteriza precisamente la condición de no inyectiva.

Los pares (x_1,y) y (x_2,y) pertenecen a f, por lo que (y,x_1) y (y,x_2) pertenecen a f^{-1}, con lo que

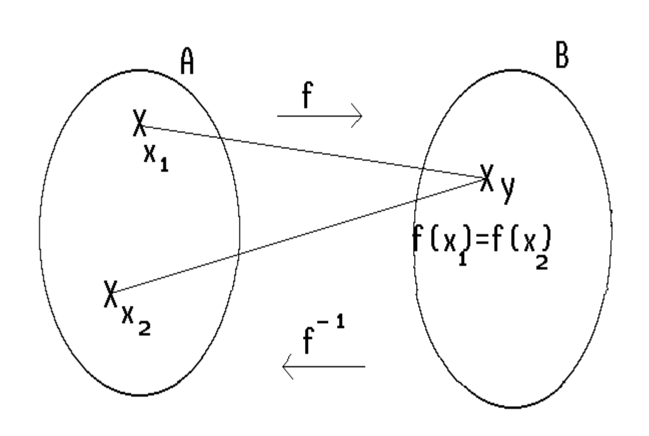


fig 9

vemos que la relación inversa de la función no inyectiva f, que es f^{-1}, no es función, al no cumplirse la condición ii)

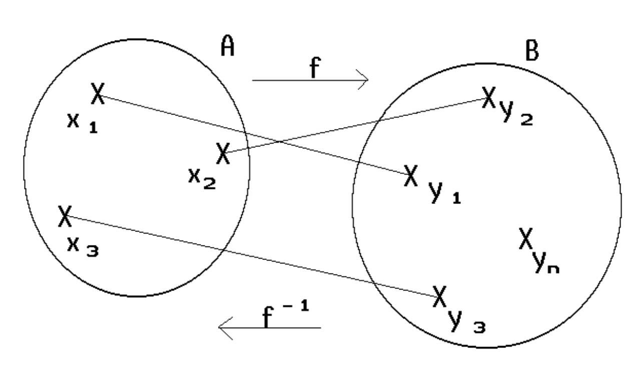



fig 10

En segundo lugar, tomamos una función f no sobreyectiva. (Fig. 10)

Por ser no sobreyectiva, la imagen no será exactamente igual al rango, con lo que se verificará estrictamente que I (f) $\subset$ R (f). Esto implica que necesariamente, hay por lo menos un elemento y_n del conjunto B, que no pertenece a la imagen de f.

Para ese elemento: $y_n \in B$, no$\exists$ $x \in A$ / $(y_n,x) \in f^{-1}$

Es decir, f^{-1} no es función, lo que nos permite asegurar que la relación inversa de una función no sobreyectiva tampoco es función, ya que en este caso no se cumple la condición i).

Finalmente, si analizamos una función f de A en B que sea biyectiva, se cumple, teniendo en cuenta esta condición, lo siguiente: (Fig. 11)

Sea f: $f = \{ (x_1,y_1) ; (x_2,y_2);...;(x_n,y_n) \}$
con $D_f \equiv A \subseteq R$, $I_f \equiv B \subseteq R$
con lo que: $f^{-1} = \{ (y_1;x_1),(y_2;x_2),..,(y_n;x_n) \}$, es también función, y su dominio:

$D (f^{-1}) \equiv I (f) \equiv B$; $I (f^{-1}) \equiv D (f) \equiv A$

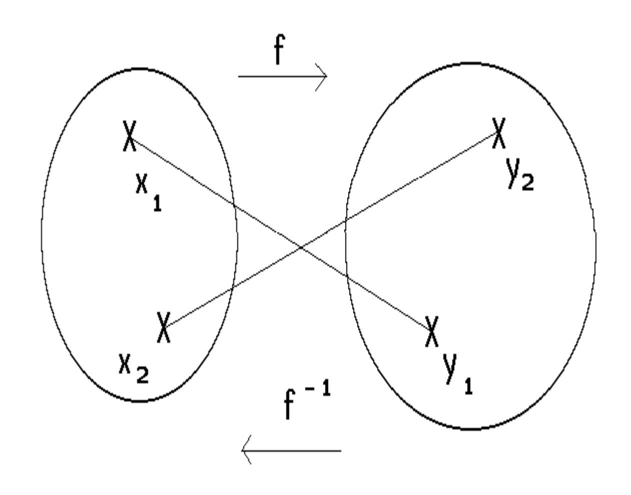


fig 11

Teorema:

Sea f una función de A en B, y g de B en A, su relación inversa. : f es biyectiva si y solo si g es biyectiva, o simbolizado : f, biyectiva $\Leftrightarrow$ g, biyectiva

Entonces, las hipótesis son:
i) f: A ———> B / $f = \{ (a;b) / a \in A \wedge b \in B \}$
ii) $g = \{ (b,a) / (a,b) \in f \}$
iii) f es biyectiva

Y se requiere probar que: a) g es función b) g es biyectiva

Demostración:

Punto a) Por ser f función biyectiva, es sobreyectiva, lo que asegura que: $I(f) \equiv B \equiv D(g)$, con lo que queda determinado que todos los elementos del conjunto B son segundas

componentes de la función f, y por ende, primeras componentes de los pares que de la relación g, con lo que ésta cumple la primera condición de función.

Por ser f función biyectiva, es inyectiva, lo que asegura que si

$(a,b) \in f \wedge (c,d) \in f \wedge b = d \Rightarrow a = c$ (1)

y como g es relación inversa de f

$(a,b) \in f \Leftrightarrow (b,a) \in g \wedge (c,d) \in f \Leftrightarrow (d,c) \in g$ (2)

reemplazando las equivalencias precedentes en (1) queda

$(b,a) \in g \wedge (d,c) \in g \wedge a = c \Rightarrow b = d$

con lo se lo que verifica imagen única para cada elemento, y por ello que se cumple la segunda condición de función.

Punto b) Para que g sea biyectiva debe probarse que es sobreyectiva e inyectiva.

Por ser f función, y g su relación inversa: D (f) ≡ I (g) ≡ A, y al ser I (g) precisamente idéntica a A (segundo conjunto para g), es sobreyectiva.

También por la condición de que f es función, se cumple que:

$(a,b) \in f \wedge (c,d) \in f \wedge a = c \Rightarrow b = d$, y reemplazando aquí (2)

$(b,a) \in g \wedge (d,c) \in g \wedge a = c \Rightarrow b = d$,

con lo que la función g es inyectiva, y consecuentemente es biyectiva.

Expresión formal de la función inversa

Si f es función de A en B, se llama <u>función inversa</u> de f a la función f^{-1} de B en A en que se verifique

$\forall x \in A , \forall y \in B : f^{-1} [f(x)] = x \wedge f [f^{-1} (y)] = y$

(Fig. 12)

La expresión anterior adquiere significado más profundo al definirse el concepto de composición de funciones, dentro del álgebra de las funciones reales.

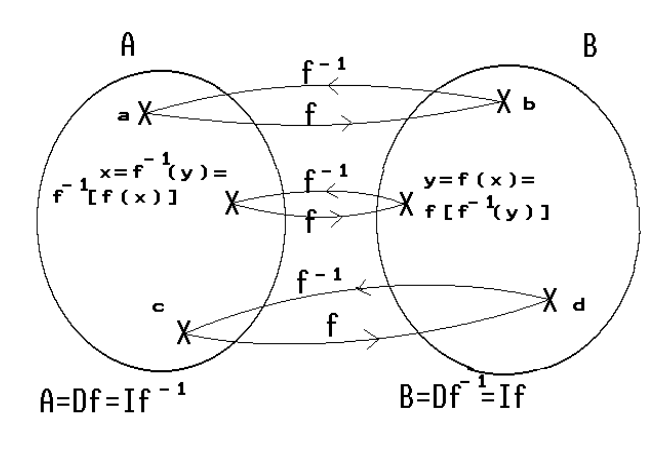


fig 12

Crecimiento y decrecimiento

Sea una función f: R ———> R considerada en un conjunto D de su dominio que llamamos A, siendo $D \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, para la que definiremos los conceptos de crecimiento y decrecimiento en ese conjunto D (Fig. 13).

f es creciente en D sí y sólo si para cualquier par de puntos del intervalo, $x_1 \in D$, $x_2 \in D$, se cumple que: si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

f es estrictamente creciente en D sí y sólo si para todo par de puntos $x_1 \in D$, $x_2 \in D$, se cumple que: si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

f es decreciente en D sí y sólo si para cualquier par de puntos del intervalo, $x_1 \in D$, $x_2 \in D$, se cumple que: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

f es estrictamente decreciente en D sí y sólo si para todo par de puntos $x_1 \in D$, $x_2 \in D$, se cumple que: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

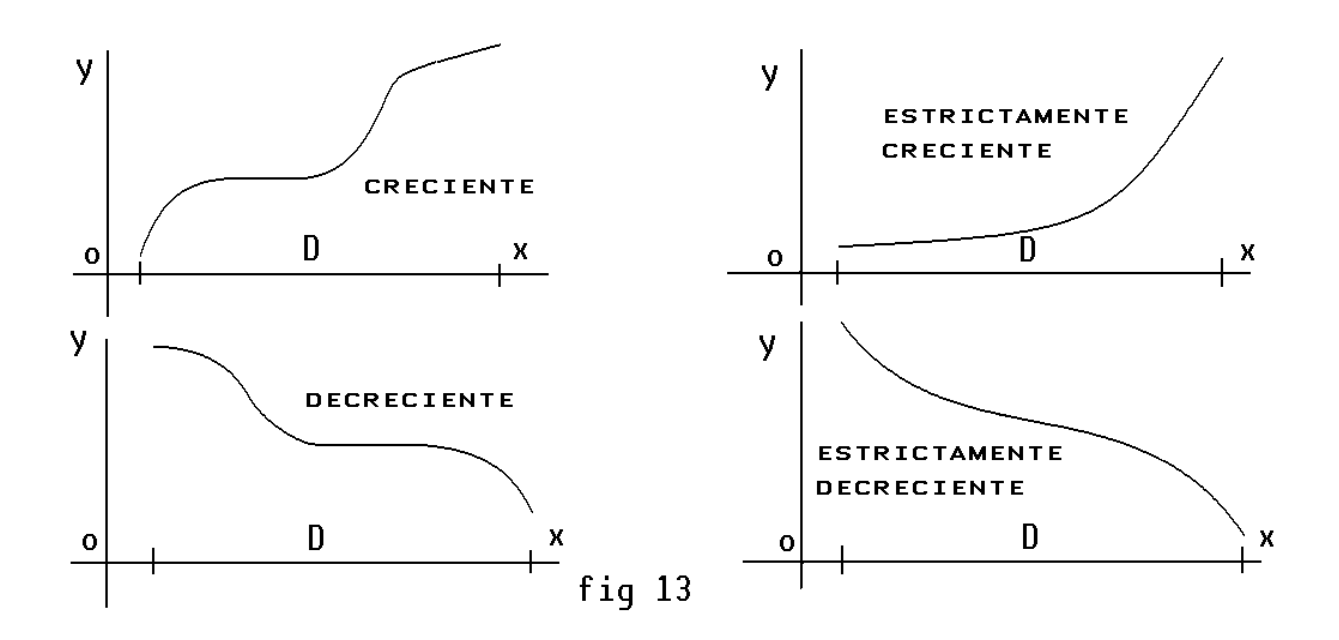


fig 13

Cabe aclarar que el conjunto D para el que analizamos el crecimiento o decrecimiento puede ser el dominio total de la función, o un subconjunto de aquel. Dentro del dominio de la función puede haber subconjuntos D_1 , D_2 , y otros más, para los que se cumplan distintas características respecto del crecimiento. Por ejemplo creciente en D_1 , estrictamente decreciente en D_2 , y así sucesivamente.

Funciones monótonas

Se llaman funciones monótonas, a aquellas funciones estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes en un cierto intervalo o conjunto D, o en su dominio.

Paridad

Se define como función par a aquella en que se verifica, para todo $x \in D(f)$, que la imagen de la misma toma idéntico valor en valores opuestos del dominio: en x y en -x.

f función par $\Leftrightarrow$ $\forall$ x: f (x) = f (-x)

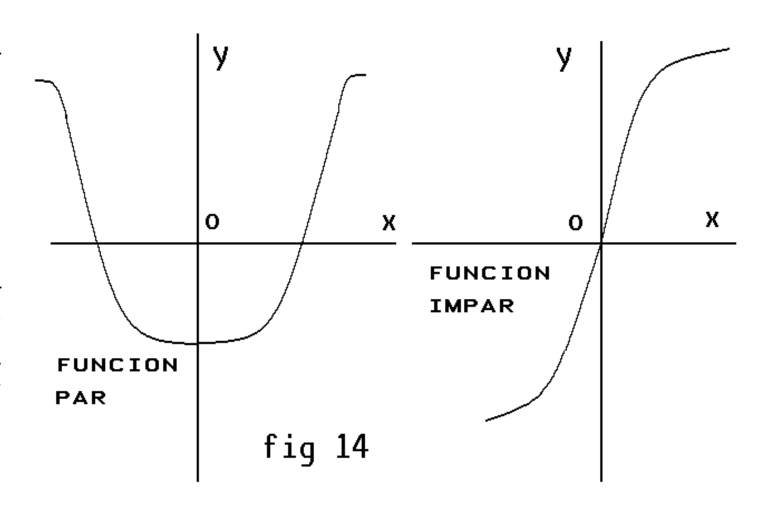


fig 14

Se define como función impar a aquella en la que se verifica, para todo $x \in D(f)$, que toma valores opuestos de la imagen para valores opuestos del dominio, es decir, en x y en -x.

f función impar $\Leftrightarrow$ $\forall$ x: f (x) = - f (-x)

Es importante tener en cuenta que no todas las funciones son pares o impares excluyentemente, sino por el contrario, la mayoría no son ni una ni otra.

Es demostrarse fácilmente, que toda función puede expresarse como la suma de una función par y una función impar. Sería f(x) (cualquiera) = g(x) (par) + h(x) (impar)

Queda como propuesta a resolver, verificar a partir de la definición, que las funciones pares presentan gráficas simétricas respecto del eje de las ordenadas, mientras que en las funciones impares sus gráficas presentan simetría respecto del origen de coordenadas. (Fig. 14)

Funciones polinómicas

Definimos función polinómica a aquella función real, f: R ——> R, tal que:
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
o, como sumatoria: $\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$, siendo los a_i números reales.

Se cumple siempre que: $D(f) \equiv R$; $I(f) \subseteq R$.
La función polinómica es, entonces

f: R ——> R / f (x) = P (x), con P (x) un polinomio entero en variable x.

El grado de la función polinómica es el del polinomio que le corresponde en su definición.

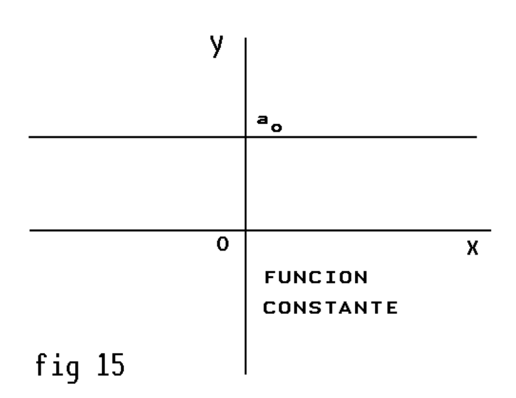


fig 15

Función constante

Es la función polinómica de grado cero: (fig 15)

f: R ———> R / f (x) = a_0 , o también: y = a_0

f es función constante ⇔ $\exists\, a_0 \in R$ / $\forall$ x : f (x) = a_0
D (f) = R ; I (f) = { a_0 } (Fig. 15)
No es inyectiva ni sobreyectiva. Es, obviamente, par.

Función identidad - Función valor absoluto - Función signo

El caso más elemental de función polinómica de grado uno, lo determina el polinomio más simple de primer grado, cuando a_1 vale uno, y a_0 vale cero.

Ello define la función identidad:

f: R ——> R / f (x) = x , o también y = x : f es función identidad ⇔ $\forall$ x : f (x) = R
D (f) = R ; I (f) = R . Es inmediato determinar que es función biyectiva e impar (Fig. 16 a)

Una función igualmente sencilla, es la función valor absoluto, definida con dos leyes elementales para distintos valores del dominio. De su definición surge que es par.

f: R ———> R / f (x) = $|x|$, siendo: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

D (f) = R ; I (f) = $R^+ \cup \{0\}$ No es función inyectiva, y tampoco sobreyectiva (Fig. 16 b)

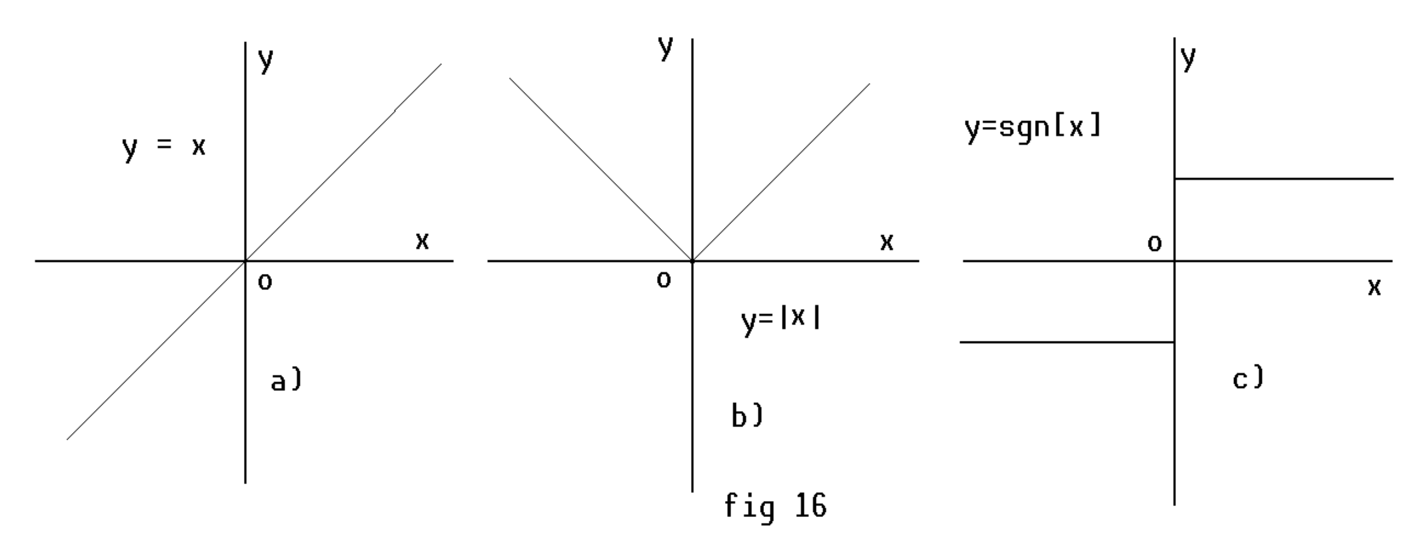


fig 16

Otra función clásica y sencilla es la función signo, y = sgn [x], (Fig. 16 c) que se define así

f: R ———> R / f (x) = sgn [x] = $\frac{|x|}{x}$ y, por la definición de la función valor absoluto, es:

$$\text{sgn}[x] = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ D (f) = R - { 0 } ; I (f) = { -1 , +1 }

Es usual completar la función sgn [x], asignando el valor 0, para x = 0, con lo que su dominio pasa a ser el conjunto R. Es claramente impar.

Función lineal

Cuando el polinomio es de primer grado, completo, de la forma: $P(x) = a_1 x + a_0$, queda definida la función polinómica de primer grado, llamada función lineal, a partir de que es una recta su representación gráfica.

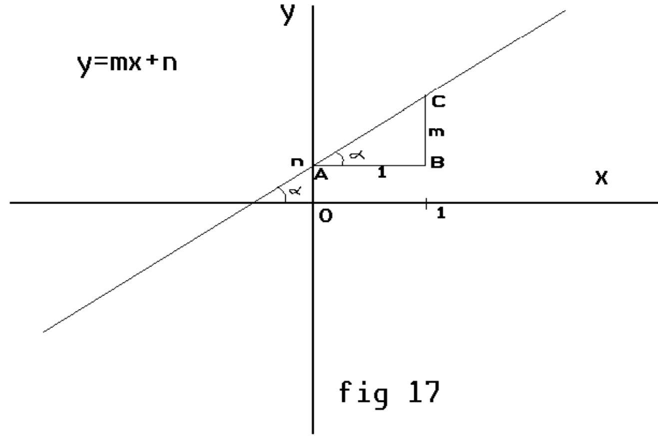
En la función lineal, se suele llamar al coeficiente de x, y al término constante, con letras tales como "m" y "n" respectivamente, también con "a" y "b", u otras.

Como se expresó en casos anteriores, será una función f

$f: R \longrightarrow R \;/\; f(x) = m\,x + n$, o también $y = m\,x + n$

f es función lineal $\Leftrightarrow \forall\, x : f(x) = m\,x + n$

La expresión $y = m\,x + n$, representa la totalidad de las rectas en el plano, con la única excepción de las verticales, cuyas ecuaciones de la forma $x = a$ no constituyen una función. Incluye a las rectas horizontales, como caso particular en que $m = 0$, que son las correspondientes a la función constante, ya definida.



Tendremos para la función lineal: D (f) = R ; I (f) = R , (con $m \neq 0$) y es sencillo determinar que la función lineal es biyectiva.

Es visto en nivel medio que la representación gráfica de una función lineal es una recta.

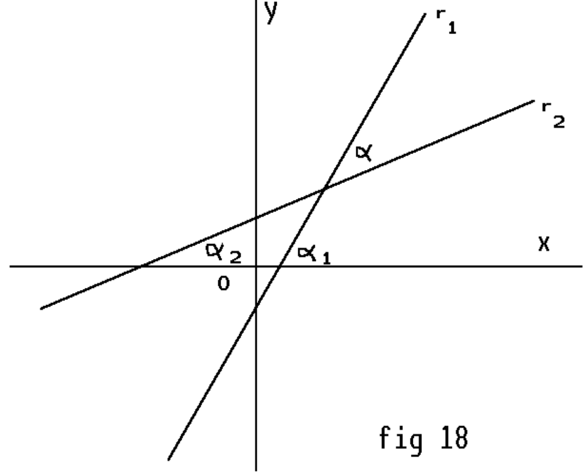
Por ello, se recuerda aquí solamente el significado de "m" y de "n", con el gráfico de una recta cualquiera (Fig. 17).

El valor de "m" (con su signo), determina el valor de la pendiente de la recta, que es la tangente trigonométrica del ángulo que ella forma con el semieje positivo de las abscisas, o sea que $m = \text{tg}\,\alpha$.

En tanto "n" es llamada ordenada al origen, dado que el punto (0 ; n) es precisamente el punto de la intersección de la recta con el eje de ordenadas.

A partir de esos valores, es muy sencillo graficar la recta genérica $y = m\,x + n$.

Se ubica en primer lugar el punto (0 , n), que llamamos A en la figura. A partir del mismo, se traza una paralela al eje de abscisas de longitud unitaria en sentido positivo de dicho eje, alcanzando el punto B del gráfico. Desde este B, se traza una paralela al eje de ordenadas,



de longitud igual a la pendiente m, y con sentido conforme el signo de la misma, para obtener el punto C. Uniendo A con C queda determinada la recta.

Es útil recordar los casos particulares de la recta:

Si $m = 0$, resulta $y = n$, que es una recta paralela al eje x.

Si $n = 0$, la recta $y = m\,x$, pasa por el origen de coordenadas.

La ecuación $x = a$ (no es función) representa una recta vertical.

Paralelismo - Perpendicularidad - Angulo entre dos rectas

Se llama ángulo entre dos rectas, al menor de los que determinan dos rectas que se cortan en el plano.

Por trigonometría elemental, dos rectas r_1 y r_2, (Fig. 18), que forman respectivamente con el eje de abscisas ángulos α_1 y α_2 determinan entre sí el ángulo α, considerándolo siempre que verifique: $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

Su medida será: $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, o $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, según cual sea mayor.

El cálculo del valor del ángulo α, es inmediato, a partir de la fórmula trigonométrica de la diferencia de ángulos para la tangente:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{tg}\alpha_2 - \text{tg}\alpha_1}{1 + \text{tg}\,\alpha_1.\text{tg}\,\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2}$$

Esta expresión general, nos determina la conocida condición de paralelismo, ya que si dos rectas son paralelas el ángulo que forman es 0, con lo que $\text{tg}\,\alpha = 0$, y ello ocurre si es nulo el numerador, lo que se verifica cuando sus pendientes son iguales.

Las rectas r_1, de ecuación, $y = m_1 x + n_1$; y r_2, de ecuación, $y = m_2 x + n_2$

Son paralelas si $m_1 = m_2$: $r_1 \parallel r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

También obtenemos de aquella expresión la condición de perpendicularidad, ya que dos rectas son perpendiculares si el ángulo entre ellas es $\frac{\pi}{2}$, lo que equivale a una tangente que crece indefinidamente, para lo cual el denominador tiende a ser cero, lo que requiere $1 + m_1.m_2 = 0$.

Las rectas r_1, de ecuación, $y = m_1 x + n_1$: y r_2, de ecuación, $y = m_2 x + n_2$

Son perpendiculares si: $1 + m_1.m_2 = 0$ o sea : $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Distancia entre dos puntos

Para dos puntos cualesquiera A (x_0 ; y_0) y B (x_1 ; y_1), recordamos aquí la expresión de la distancia entre A y B. $d^2_{(A,B)} = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$ o de esta forma:

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Ecuaciones de la recta

También como repaso de lo ya visto en cursos previos, expresamos aquí las dos formas posibles de obtención de la ecuación de una recta.

a) Recta determinada por un punto y la pendiente de la misma

Datos: punto P_0 .(x_0 , y_0) ; pendiente m

La ecuación de la recta es: $y - y_0 = m (x - x_0)$

b) Recta determinada por dos puntos

Datos: puntos P_0 (x_0 , y_0) ; P_1 (x_1 , y_1)

La ecuación de la recta es: $y_1 - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$

Función cuadrática

Considerando el polinomio de segundo grado completo de la forma: $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, la función polinómica y = P(x) es ahora llamada función cuadrática, correspondiendo su representación gráfica a una parábola de segundo grado.

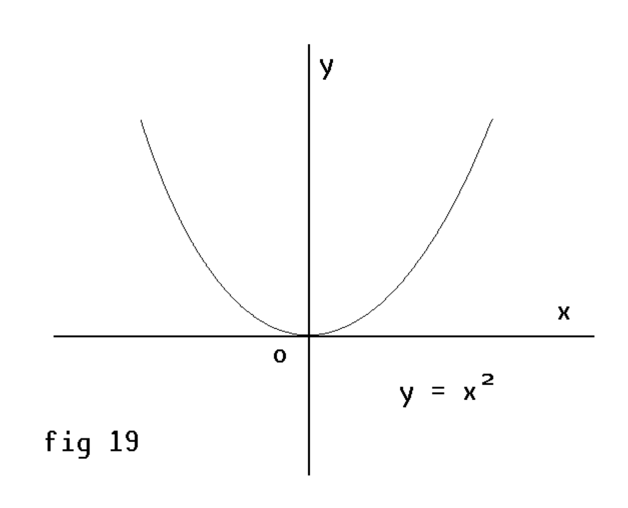
En forma análoga a lo expresado para la función lineal, se la suele identificar con coeficientes a, b y c, de manera que:

$f: R \longrightarrow R \;/\; f(x) = a x^2 + b x + c$

f es función cuadrática $\Leftrightarrow \forall x : f(x) = a x^2 + b x + c$

De la expresión general completa, se pueden analizar los casos particulares a partir de la nulidad de algunos de los coeficientes. Desde ya, es $a \neq 0$, ya que si no fuera así no existiría la expresión de segundo grado.

También este tema se considera de conocimiento previo al curso, por lo que aquí simplemente se recuerdan algunos conceptos.



Parábola básica: $y = x^2$

El caso más sencillo de función polinómica

de segundo grado es cuando a = 1 , b = 0 , c = 0, que resulta:

$y = x^2$ o $f(x) = x^2$ (Fig. 19)

Tomamos este caso como un simple ejemplo para determinar las características de esta función

$D(f) = R$; $I(f) = R^+ \cup \{0\}$; $R(f) = R$

No es inyectiva, ya que, para: $a \in D(f) \wedge -a \in D(f)$ es $f(a) = f(-a)$.

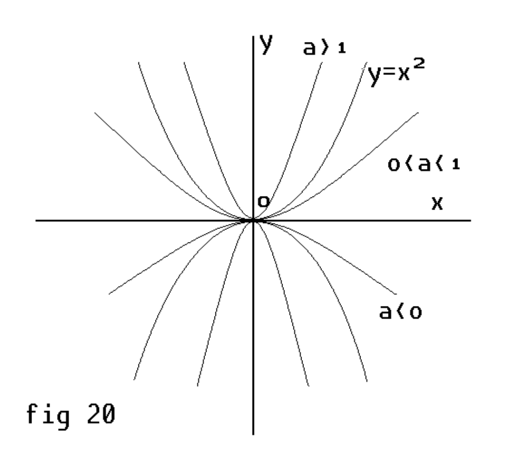
No es sobreyectiva, ya que es siempre: $I(f) \subset R(f)$.

En cuanto a su paridad, se verifica: $f(x) = x^2$; $f(-x) = (-x)^2 = x^2 \Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow$ es par.

Con una redefinición de la función (se debe destacar que no es la misma función), en la que se restringiera adecuadamente el dominio y el rango:

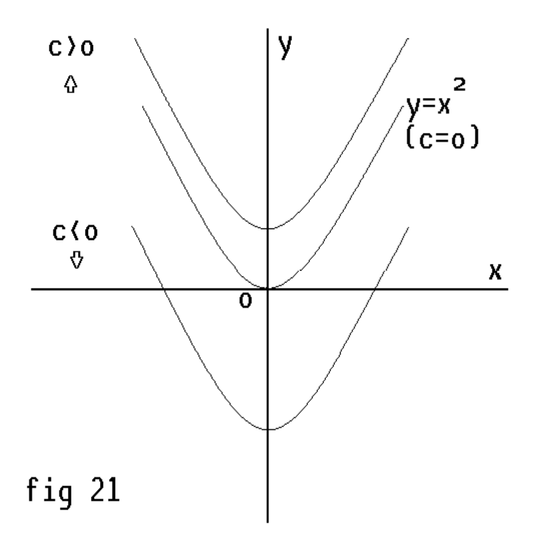
$D(f) = I(f) = R^+ \cup \{0\}$, o sea: $f_1: R^+ \cup \{0\} \longrightarrow R^+ \cup \{0\} \,/\, y = x^2$

resulta fácilmente demostrable que la nueva f_1 es biyectiva, monótona y en consecuencia, su inversa es función.



Si se analiza ahora $y = a\,x^2$, con $a \neq 1$, la gráfica de la función depende del signo y del valor absoluto de "a".

Si $a > 0$, las ramas de la parábola son hacia arriba y si $a < 0$ son hacia abajo (Fig. 20). El valor absoluto de "a" dará una mayor o menor abertura respecto de a = 1 . Si $|a| > 1$, las ramas serán mas cerradas, y si $|a| < 1$, más abiertas.



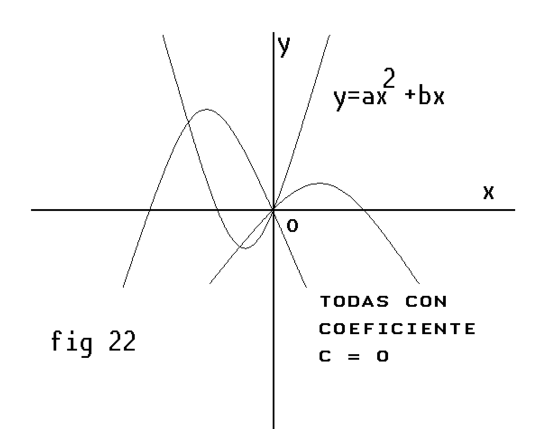
Extendiendo los casos particulares, ahora con $a \neq 0$ y $c \neq 0$, o sea con $f(x) = a\,x^2 + c$, (Fig. 21), se verifica que se produce en la gráfica un desplazamiento hacia arriba o hacia abajo, según "c" sea positivo o negativo respectivamente.

El vértice de la parábola se mantiene sobre el eje de las ordenadas, para cualesquiera sean los valores de a y de c.

En los casos vistos, para $f(x) = a\,x^2 + c$, y para $f(x) = a\,x^2$, aplicando las definiciones dadas, resulta inmediato determinar que su crecimiento o decrecimiento estará dado para los intervalos $x > 0$ o para $x < 0$ según sea el signo de "a".

Si a > 0, por ejemplo, será estrictamente creciente para x > 0, y será estrictamente decreciente cuando x < 0, mientras que se verifica lo contrario si a < 0.

El último de los casos particulares se presenta cuando es $a \neq 0$, $b \neq 0$, pero c = 0. (Fig. 22)



Es la forma $f(x) = a\,x^2 + b\,x$ resultando inmediato que el punto (0 ; 0) pertenece a la función, por lo que la gráfica pasa por el origen de coordenadas.

La existencia de $b \neq 0$ desplaza el vértice, y lo lleva fuera del eje de las ordenadas.

Función cuadrática completa

Puede expresarse en la forma general: $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, o como: $f(x) = a\,(x - h)^2 + k$

La segunda forma determina explícitamente la ubicación del vértice de la parábola, estando el mismo ubicado en V = (h;k) mientras que las ramas hacia arriba o hacia abajo dependen como siempre del signo de a.

Los valores de h y k, resultan en función de los coeficientes de la forma general a, b, y c, siendo sus expresiones deducibles fácilmente. Se obtiene:

$$(*) \qquad h = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad k = c - \frac{b^2}{4a}$$

Resulta muy práctico para representar la parábola esta forma que evidencia las coordenadas del vértice. A partir de la ubicación del mismo, el signo y valor de "a" ubica, sencillamente como se ha dicho, posición y abertura de las ramas.

En un caso concreto, el pasaje desde la forma general se realiza sin memorizar las expresiones (*), completando cuadrados, con cualquiera de las metodologías usuales.

Función cúbica

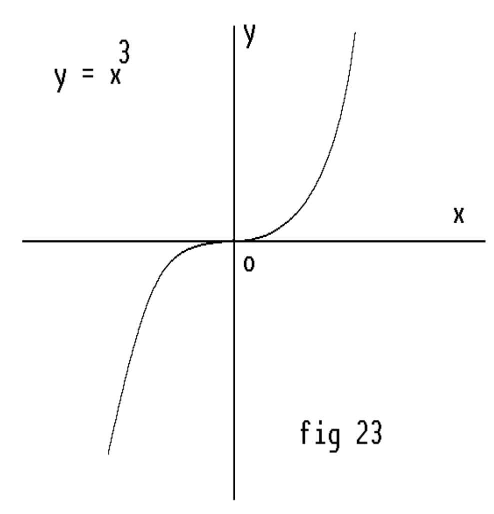
La expresión de la función cúbica se obtiene de y = f (x), cuando f (x) es un polinomio entero de tercer grado. Formalmente se indica como siempre:

$f: R \longrightarrow R \;/\; f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

f es función cúbica $\Leftrightarrow$ $\forall\, x : f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

Para la función polinómica de tercer grado, se cumple siempre que: D (f) = R (f) = I (f) = R
Interesa analizar en particular cuando b = c = d = 0 , y es a = 1, representada en la gráfica

o sea $f: R \longrightarrow R \;/\; f(x) = x^3$, o, $y = x^3$ (Fig. 23)



En general, las funciones con d = 0 pasan por el origen de coordenadas, y en particular las de la forma f (x) = ax^3, representan gráficamente el conjunto de parábolas con vértice en el mismo.

El coeficiente "a", produce con su signo y valor absoluto, similar efecto que en las parábolas cuadráticas:

Si a $>$ 0, la rama derecha (cuando x $>$ 0) es hacia arriba y la rama izquierda (para x $<$ 0) es hacia abajo. Lo opuesto ocurre si a $<$ 0.

El valor absoluto del coeficiente determina el acercamiento de las ramas al eje de ordenadas, o el alejamiento del mismo, según sea $|a|$ mayor o menor que 1 respectivamente.

Si a $>$ 0 , se ve inmediatamente que es estrictamente creciente en su dominio R, ya que
$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)\ ,\ \forall\ x_1, x_2$.

Si a $<$ 0 resulta estrictamente decreciente.

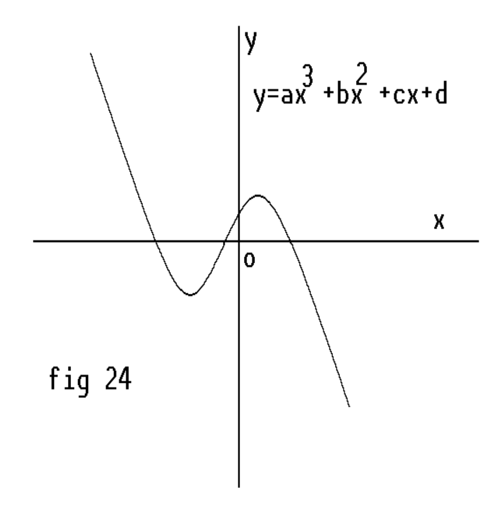
En ambos casos, es monótona, biyectiva y consecuentemente es función su inversa $f^{-1}(x)$.

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, siendo, lógicamente por ser inversa de x^3 : $D(f^{-1}) = R(f^{-1}) = I(f^{-1}) = R$

En cuanto a su paridad, es función impar, ya que se cumple que :

$f(x) = x^3$; $f(-x) = (-x)^3 = x^3 \Rightarrow f(x) = -f(-x)$.

De los otros coeficientes distintos de cero, si es d $\neq$ 0 , mientras c = b = 0 : $f(x) = a\,x^3 + d$, se produce desplazamiento hacia arriba o hacia abajo del vértice, que permanece sobre el eje de las ordenadas, como en la parábola cuadrática.



La expresión general : $f(x) = a\,x^3 + b^2 + c\,x + d$,

sólo en algunos casos puede expresarse en la forma:

$f(x) = a\,(x - h)^3 + k$, teniendo su vértice en V = (h , k).

Solamente cuando ello es posible, la función cúbica es biyectiva.

El caso general, para valores cualesquiera de los coeficientes, hace que la función no sea inyectiva. (Fig. 24)

Funciones polinómicas en general

Son funciones del tipo: R ——> R / f (x) = P (x) , siendo P (x) de grado n, y con D (f) = R

Solamente distinguiremos los casos en que n sea par o impar, ya que si n es impar I (f) = R, mientras que si n es par I (f) $\subset$ R.

Función módulo

A partir de la función módulo definida antes, y aplicando un concepto similar con lo indicado para la función cuadrática, puede extenderse la función ya analizada f (x) = $|x|$ a un caso absolutamente más general: f (x) = a $|$ x - h $|$ + k

Donde h y k son las coordenadas del vértice de la gráfica: V (h ; k), mientras que "a" cumple igual efecto que en el caso de la parábola, ya que su signo positivo o negativo determina el sentido de sus ramas rectas, hacia arriba o hacia abajo respectivamente, mientras que su mayor o menor valor absoluto indica la mayor o menor pendiente de las mismas.

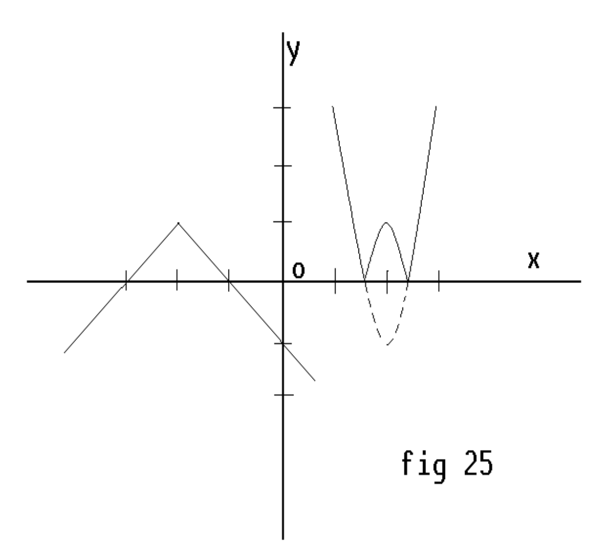
En cuanto a la función básica y = $|x|$, ya se indicó que no cumple con la característica de inyectiva ni sobreyectiva, es estrictamente creciente para x > 0, y estrictamente decreciente para x < 0. Con igual concepto de crecimiento y decrecimiento para vértice desplazado

En cuanto a la paridad de $|x|$**,** si x > 0, f (x) = x , mientras que f (-x) = - (-x) = x , con lo que se verifica que f (x) = f (-x) ⇒ f es par, ya que idéntico razonamiento es aplicable para x < 0.

Extensión del concepto de función módulo

El concepto de la función módulo puede extenderse, aplicándolo a cualquier expresión, que en general se puede indicar como f (x) = $|g (x)|$ para la cual, conforme la definición dada, será:

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{si } g(x) < 0 \end{cases}$$



En la figura 25, están graficadas aproximadamente en el mismo sistema de ejes, como ejemplo, las funciones:

f (x) = - $|x + 2|$ + 1 ; g (x) = $|3 (x - 2)^2 - 1|$

Funciones racionales

Se llaman <u>funciones racionales</u> a aquellas de la forma

f : R ———> R / $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, siendo P(x), Q(x), polinomios

Lógicamente quedan excluidos del dominio los valores $x_i \,/\, Q(x_i) = 0$

Consideramos únicamente las <u>fracciones racionales propias</u>, que son aquellas en que el grado del polinomio numerador es menor que el grado del polinomio denominador (la división entre los polinomios no es posible).

A partir de su definición, estas funciones adquieren un grado de mayor o menor complejidad según sean los respectivos polinomios que la componen.

Los casos más sencillos son aquellos en los que el polinomio numerador es una constante, al ser de grado cero, y el polinomio denominador una función lineal o cuadrática, respectivamente de las formas:

$$f(x) = \frac{k}{mx + n} \quad \text{(grados 0 y 1)} \qquad g(x) = \frac{k}{ax^2 + bx + c} \quad \text{(grados 0 y 2)}$$

A su vez, cabe la posibilidad de la buscar máxima simplicidad de cada uno de los denominadores, y del valor del numerador, con $k = 1$.

La más sencilla será, entonces, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, llamada hipérbola equilátera, con su vértice en el origen de coordenadas. (Fig. 26)

fig 26

Para ella es D (f) = I (f) = R - { 0 }, verificándose fácilmente que es biyectiva (redefiniendo el rango), impar, y estrictamente decreciente para cada uno de los intervalos de su dominio (para $x < 0$, y para $x > 0$)

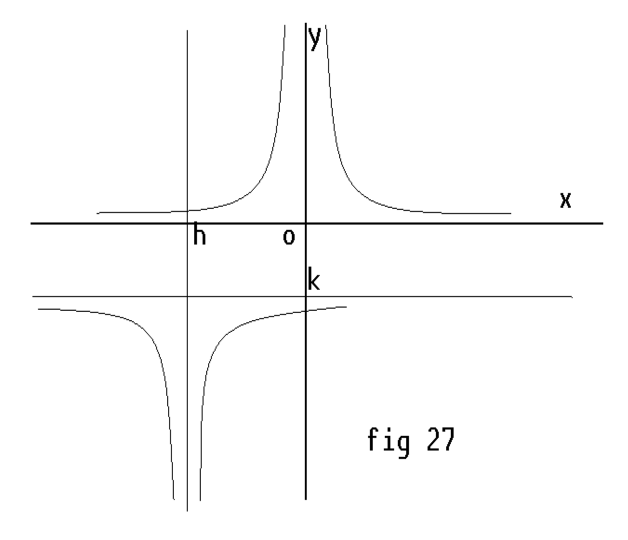
Con: $f(x) = \dfrac{C}{x - h} + k$ como forma general.

El signo de C determina la posición de las ramas, y la condición de crecimiento o de decrecimiento. El vértice estará en (h,k). (Fig. 26).

Considerando el denominador de segundo grado, la simplicidad máxima se expresa con

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

En ella, es D(f) = R - {0} ; I(f) = R^+, no inyectiva, par, estrictamente creciente para $x < 0$, y estrictamente decreciente para $x > 0$ (Fig. 27).



La forma general está dada por: $g(x) = \dfrac{C}{(x-h)^2} + k$

Aquí el signo de C también invierte la posición de las ramas y la consiguiente condición de crecimiento o decrecimiento. El vértice, como siempre, se ubica en (h,k) (Fig. 27).

El tema no se agota aquí, dejando como posibilidad de práctica, la combinación de estas fracciones racionales con la función valor absoluto, que permiten una gama muy amplia de variantes.

Queda como alternativa, la determinación de funciones con numerador un polinomio de primer grado y como denominador uno de segundo grado.

Se propone analizar, y graficar, como práctica entre otras muchas, las siguientes:

$F(x) = \left| \left| \dfrac{1}{x-3} \right| - 4 \right|$; $G(x) = \left| -\dfrac{1}{(x+2)^2} \right| - 2$

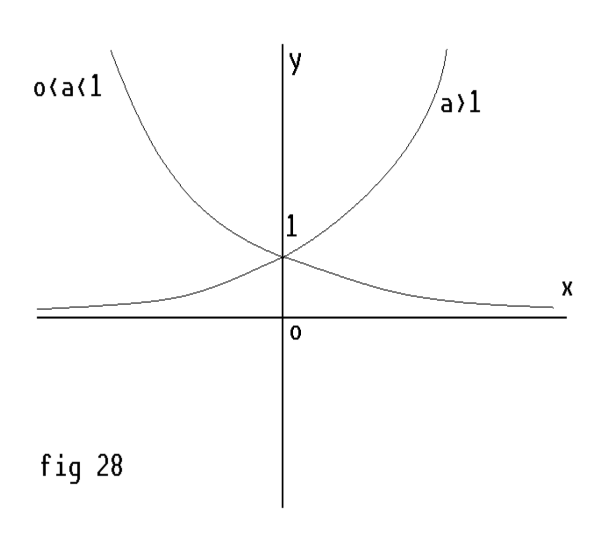
Funciones exponenciales

Se define función exponencial de base a, a la función:

f: R ———> R / f (x) = a^x , siendo a $\in$ R $^+$, con a $\neq$ 1

Para ella, será D (f) = R ; I (f) = R $^+$

Paridad: como $f(x) = a^x$; $f(-x) = a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, resulta que no es par ni impar



Su crecimiento o decrecimiento quedará determinado según sea la base " a " mayor o menor que 1. Es fácil demostrar que si a > 1 es estrictamente creciente en R, y si a < 1 es estrictamente decreciente en R. (Fig. 28).

El valor de a cuando es más próximo a 1, determina que la curva es más horizontal, mientras que si la base crece por encima de 1 hacia valores cada vez mayores, o decrece hacia cero con valores cada vez menores, su rama con valor mayor que 1 se va aproximando a una curva más cerrada hacia el eje de ordenadas, mientras que la otra se "aplasta" hacia el eje de abscisas.

Se verifica que si: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$, por lo que la función es uno a uno, y si se define el rango R (f) = R^+ es sobre, y por ende biyectiva, lo que determina que la inversa de la función exponencial es también función.

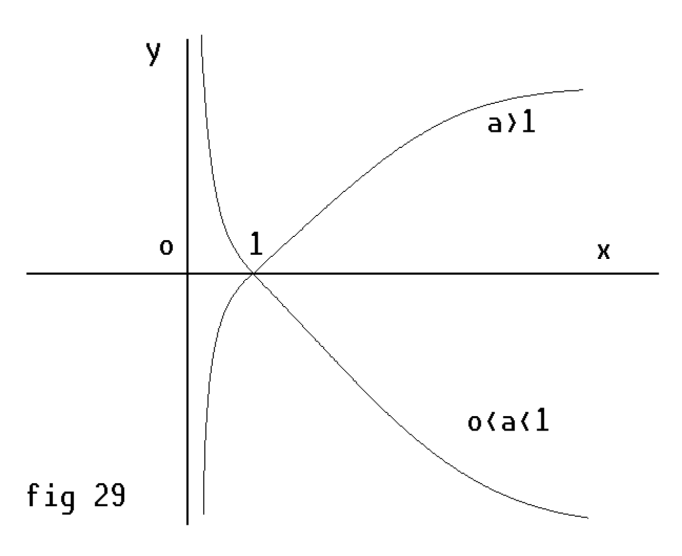


fig 29

Función logarítmica

A partir de la definición del logaritmo de un número, la función logarítmica resulta ser la función inversa de la función exponencial.

$f: R^+ \longrightarrow R \; / \; f(x) = \log_a x$, siendo $a \in R \wedge a > 0, a \neq 1$

Precisamente por definición de logaritmo, se verifica $b = a^c \Leftrightarrow c = \log_a b$, lo que confirma que las funciones exponencial y logarítmicas son respectivamente inversas, con lo que, la función logarítmica es biyectiva.

Es D (f) = R^+ ; I (f) = R.

También será estrictamente creciente o estrictamente decreciente dependiendo del valor de su base a.

Al igual que su función inversa, no es ni par ni impar.

Su gráfica, por analogía a lo dicho para la exponencial, tendrá características distintas, según sea "a" mayor o menor que 1. (Fig. 29)

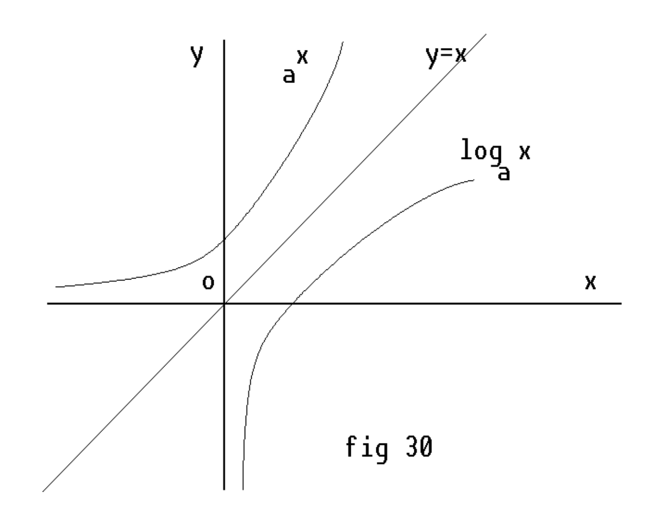


fig 30

Si se trazan las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica en un mismo sistema de ejes, se verifica que presentan simetría respecto de la función identidad, por tratarse de funciones inversas una respecto de la otra (Fig. 30).

La demostración de que las gráficas de funciones inversas f, g, son simétricas respecto de la recta y = x , es inmediata a partir de la condición que las define:

$$\forall x \in A \wedge y \in B: \quad (x;y) \in f \wedge (y;x) \in g$$

Se propone resolver esta demostración elemental, a partir de propiedades geométricas simples.

Funciones trigonométricas

Este tema también ha sido visto previamente, por lo que solamente se recordará para las mismas lo referido a sus dominios e imágenes, su paridad, y el crecimiento o decrecimiento.

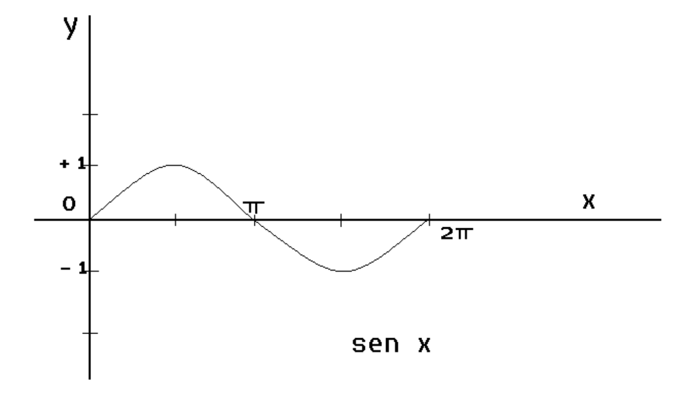


fig 31

Así tenemos:

f (x) = sen x (fig 31)

D (f) = R ; I (f) = [-1 ,+1] ; función impar

f (x) = cos x

D (f) = R ; I (f) = [-1 ,+1] ; función par

Son estrictamente crecientes y decrecientes, según distintos intervalos de su dominio.

f (x) = tg x (Fig. 32)

D (f) = R - { (2n+1).π/2 , n ∈ Z } ; I (f) = R;

Es función impar y estrictamente creciente en cada intervalo de su dominio.

f (x) = cotg x

D (f) = R - { (2n).π/2 , n ∈ Z } ; I (f) = R ;

Es función impar y estrictamente decreciente en cada intervalo de su dominio.

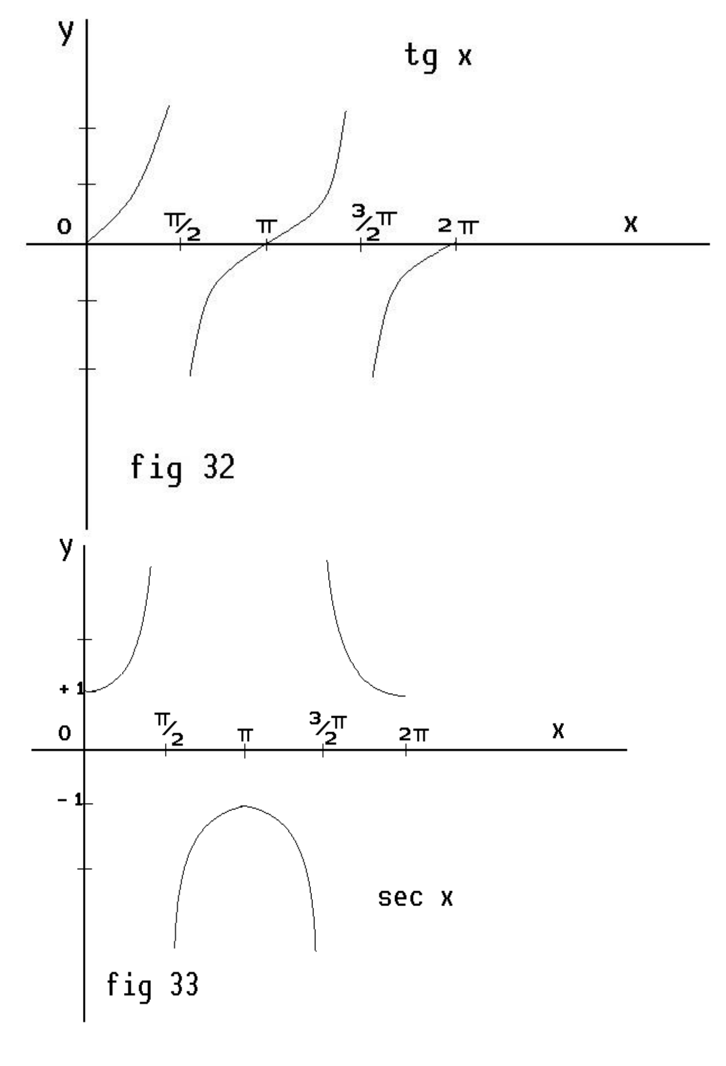


fig 32

fig 33

f (x) = sec x (Fig. 33)

D (f) = R - { (2n+1).π/2 , n ∈ Z } ;
I (f) = (-∞,-1] U [+1,+∞) ;

Es función par y estrictamente creciente y decreciente, según distintos intervalos.

f (x) = cosec x

D (f) = R - { (2n).π/2 , n ∈ Z } ;
I (f) = (-∞,-1] U [+1,+∞) ;

Es función impar y estrictamente creciente y decreciente, según distintos intervalos.

La periodicidad de las funciones trigonométricas hace que ninguna de ellas sea función inyectiva.

No obstante, para todas las funciones vistas, mediante adecuadas restricciones del dominio según la función de que se trate, se determinan intervalos donde se consigue cumplir la condición de uno a uno, por lo que, para esos intervalos restringidos, y con la redefinición del rango que corresponda, se obtiene la condición de biyectividad.

En esas circunstancias, se verifica la existencia de las funciones inversas para cada una de las funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas inversas

Para cada función trigonométrica, existen infinitos intervalos del dominio restringido que determinan la condición de biyectividad expresada. Considerando los correspondientes dentro del intervalo $-\pi \leq x \leq +\pi$, para cada función se verifica:

sen x es biyectiva en $[-\pi/2, +\pi/2]$
cos x es biyectiva en $[0,\pi]$
tg x es biyectiva en $(-\pi/2, +\pi/2)$
cotg x es biyectiva en $(0,\pi)$
sec x es biyectiva en $(0,\pi/2) \cup (\pi/2,\pi)$
cosec x es biyectiva en $(-\pi/2,0) \cup (0,+\pi/2)$

Existen, por ello funciones trigonométricas inversas en relación con cada una de las recién vistas, llamándose con la expresión "arc", (arco) ante el nombre de la función respectiva.

Así se tienen:

f (x) = arc sen x, inversa de la función seno
f (x) = arc cos x, inversa de la función coseno
f (x) = arc tg x, inversa de la función tangente
f (x) = arc cotg x, inversa de la función cotangente
f (x) = arc sec x, inversa de la función secante
f (x) = arc cosec x, inversa de la función cosecante

Para cada una de ellas, será su dominio el correspondiente a la imagen de su inversa, mientras que la imagen será el dominio que se haya restringido en la misma.

Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se definen a partir de expresiones algebraicas formadas con exponenciales cuya base es el número e, que es irracional, y base de los logaritmos neperianos.

Sus nombres son los de las funciones trigonométricas conocidas, con el agregado de la palabra hiperbólico, se escriben con inicial mayúscula, y quedan definidas así: (Fig. 34)

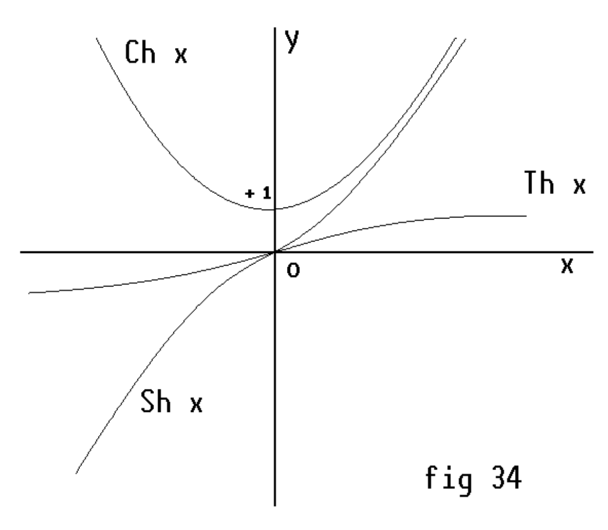


fig 34

$$f(x) = \text{Sh}\, x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right),$$

con D(f) = R ; I(f) = R ; función impar

$$f(x) = \text{Ch}\, x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right),$$

con D (f) = R ; I (f) = $[+1,+\infty)$; función par

$$f(x) = \text{Th}\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}},$$

con D (f) = R ; I (f) = $(-1,+1)$; función impar

La función tangente hiperbólica es el cociente entre el seno y el coseno hiperbólico, con similitud a lo que ocurre en las funciones trigonométricas.

Es interesante ver que $e^{x} = \text{Sh}\, x + \text{Ch}\, x$

Por otra parte, resultan las restantes funciones hiperbólicas como:

$$\text{Coth}\, x = \frac{1}{\text{Th}\, x} \qquad \text{Sech}\, x = \frac{1}{\text{Ch}\, x} \qquad \text{Cosec}\, x = \frac{1}{\text{Sh}\, x}$$

Funciones hiperbólicas inversas

Con un concepto exactamente análogo al expuesto para las funciones trigonométricas, se definen las funciones hiperbólicas inversas, en unívoca correspondencia para cada una.

Su designación es ahora precedida por la expresión "Arg", (abreviatura de "argumento" nombre con que se llama a la variable x), seguida por el nombre de la función. Serán entonces:

f (x) = Arg Sh x , inversa del seno hiperbólico
f (x) = Arg Ch x , inversa del coseno hiperbólico
f (x) = Arg Th x , inversa de la tangente hiperbólica
f (x) = Arg Cth x , inversa de la cotangente hiperbólica
f (x) = Arg Sech x , inversa de la secante hiperbólica
f (x) = Arg Cosech x , inversa de la cosecante hiperbólica

Para las funciones hiperbólicas, se verifican otras relaciones entre las mismas que presentan una marcada analogía con respecto a las que se cumplen entre las funciones trigonométricas.

Como simple ejemplo, se indica que se cumple : $\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1$

También presentan similitudes con la forma de expresar una función hiperbólica a partir de cualquiera de las restantes, formas de argumento doble (como las de ángulo doble), y otras.

Álgebra de funciones

Igualdad

Dos funciones son iguales si están compuestas exactamente por la totalidad de los mismos pares ordenados.

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad D(f) \equiv D(g) \wedge \forall x \in D: f(x) = g(x)$$

Por ejemplo, las funciones: f = x + 1 ; $g = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)}$, no son iguales, ya que el par (3;4) pertenece a la función f, pero no pertenece a la función g, ya que 3 no pertenece al dominio de g.

Suma

La función h es la suma de las funciones f y g, sí y solo si:

$$D(h) = D(f) \cap D(g) \wedge \forall x \in D(h): h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Resta

La función h es la resta de las funciones f y g, sí y solo si:

$$D(h) = D(f) \cap D(g) \wedge \forall x \in D(h): h(x) = (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

Producto

La función h es el producto de las funciones f y g, sí y solo si:

$$D(h) = D(f) \cap D(g) \wedge \forall x \in D(h): h(x) = (f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$$

Cociente

La función h es el cociente de las funciones f y g, sí y solo si:

$$D(h) = D(f) \cap D(g) - [x / g(x) = 0] \wedge \forall x \in D(h): h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Como ejemplo, operamos con las funciones: $f = +\sqrt{x}$, y $g = x^2 - 4$

Vemos que, siendo: D (f) = R^+ U { 0 } ; D (g) = R, las operaciones de suma resta y producto entre ellas no presentan dificultad alguna, siendo el dominio en cualquiera de los tres casos la intersección entre ambos dominios, o sea D(f+g) = D(f-g) = D(f.g) = R^+ U { 0 }.

Si planteamos el cociente $\frac{f}{g}$, al dominio mencionado deberemos excluir los valores que anulen el denominador, en este caso + 2 y - 2. Como - 2 ya no está en el dominio resultante de la intersección solamente debemos restringir D en + 2.

El dominio de la función cociente $\frac{f}{g}$ será entonces: (R^+ U { 0 }) - { 2 }

Composición de funciones

A partir de dos funciones f y g, es posible, conforme ciertas condiciones, establecer una nueva función h, que se obtiene a través de lo que se denomina la composición de funciones o

función compuesta de g con f, en lo que conforma la aplicación sucesiva de las funciones g y f, en ese orden.

En símbolos: h (x) = (f o g)(x) = f [g(x)], o simplemente: h = f o g.

Es también lógico y posible, en el marco que se detallará, proponerse la composición de funciones entre f y g, en el orden opuesto al anterior, para obtener otra función j.

En este caso: j (x) = (g o f)(x) = g [f(x)], o también: j = g o f.

De alguna manera, lo que se está proponiendo y definiendo, no es más que la aplicación sucesiva del concepto ya conocido de función, por lo que lo interpretamos sencillamente a partir del mismo.

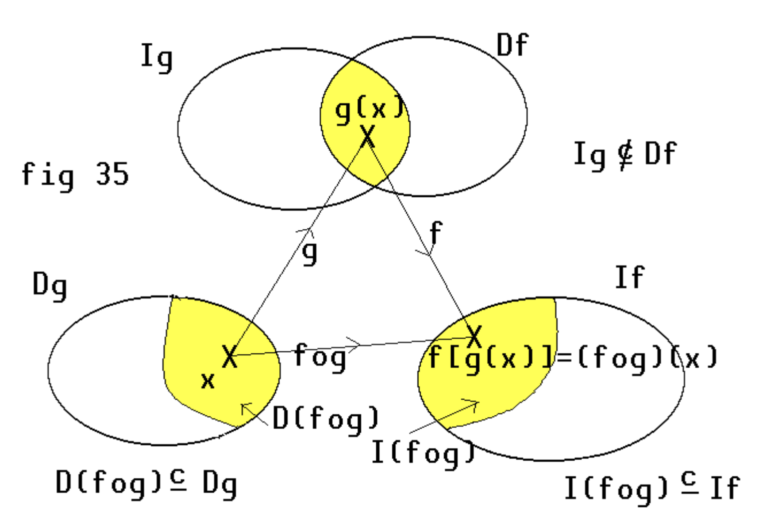
Se debe tener en cuenta que la composición de funciones no es conmutativa: ya que en general: (f o g) ≠ (g o f). Basta un contraejemplo cualquiera para probar que no cumple esa propiedad.

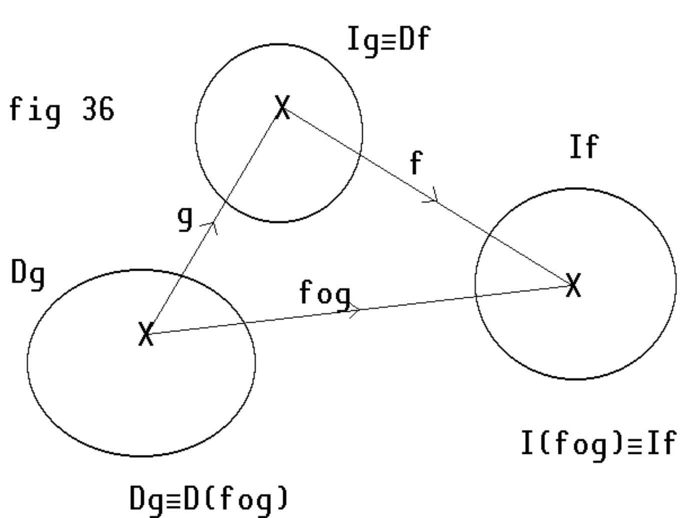
También es necesario determinar las condiciones en que es posible efectuar la composición de funciones.

Esto se vincula con los dominios e imágenes de las funciones que intervienen en la composición, y es usual analizar las formas de componer dos funciones dadas, en uno u otro orden.

Supongamos las funciones f, g, y que se busca la composición f o g, es decir, la aplicación sucesiva de g y f, en ese orden.

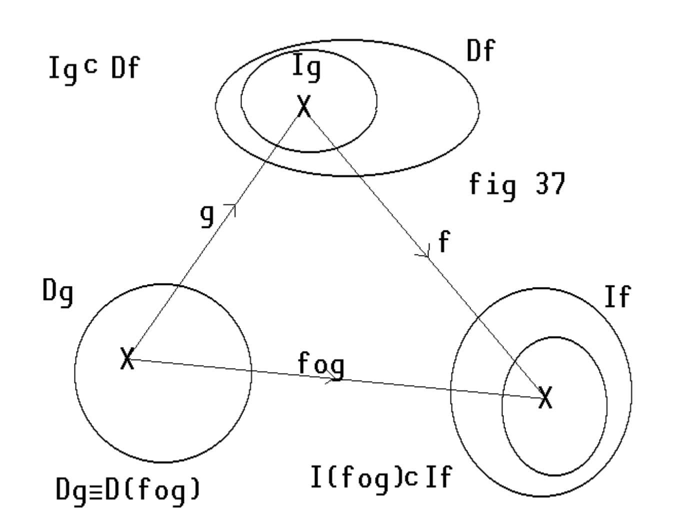
Es g la primera función que se aplica, correspondiéndole a ella un dominio Dg y una imagen Ig. La segunda función f que se aplica a continuación, tiene su dominio Df e imagen If.





Es inmediato determinar que solamente a los elementos de la imagen de la primera función g que se encuentren en el dominio de f, se podrá aplicar esta segunda función, lo que indica que la composición planteada f o g, será posible únicamente si se verifica la relación I (g) ⊆ D (f).

En la fig. 35, ello no se verifica, mientras que en la fig.36 se ve que cumple la identidad I(g) ≡ D(f), en tanto que en la figura 37 se indica un caso cuando I (g) ⊂ D (f).



Analizando los distintos casos, uno a uno, para determinar dominio e imagen de la función compuesta f o g, se tiene:

a) I (g) ≡ D (f): (Fig. 36) Es el caso más sencillo, ya que indudablemente a partir de esa identidad, para todos los elementos del dominio de g, a los que les corresponde la imagen de la misma, es aplicable la función f, por lo que resulta D (fog) ≡ D (g).

Asimismo, todos los elementos de la imagen de f se corresponden idénticamente con los de la función compuesta, es decir I (fog) ≡ I (f).

b) I (g) ⊂ D (f): (Fig. 37). Todos los elementos del dominio de g tienen su imagen dentro del dominio de f, por lo que ella es aplicable, y resultan aquellos pertenecientes a la función compuesta, resultando entonces, que D (fog) ≡ D (g), mientras que por la relación de inclusión estricta, habrá algún elemento del dominio de f sobre el que ahora al componer, ésta no pueda aplicarse.

Debido a ello no puede determinarse que la imagen de f sea exactamente la de la función compuesta, por lo que solo puede asegurarse que: I (fog) ⊆ I (f).

c) Si no se cumple la condición I (g) ⊆ D (f), (Fig. 35) no se puede efectuar, tal como está planteada la composición de las funciones fog, ya que para los elementos de g como primera función, cuya imagen no se encuentre en el dominio de la segunda función f, no existe la función compuesta.

En estas condiciones, para que la composición sea posible, es necesario determinar la parte de la imagen de g que se encuentra incluida en el dominio de f. En general, determinar la parte de la imagen de la primera función que se encuentre incluida en el dominio de la segunda. A esta imagen parcial así obtenida, se la llama imagen reducida, simbolizándola como Ig^* en nuestro caso.

Evidentemente, se cumple ahora que $I\, g^* \subseteq D\, f$, restando ahora establecer el dominio de la primera función que se corresponda con la imagen reducida de la misma. La parte del dominio que se obtiene, se llama dominio restringido, simbolizada como $D\ \ g^*$.

En definitiva, el dominio de la función compuesta obtenida en estas condiciones será entonces D (fog) ≡ $D\ g^*$, que en la figura 35 está sombreado. En ese mismo dibujo, la imagen restringida $I\ g^*$ es la parte también sombreada, intersección entre I g y D f. Finalmente la imagen de la función compuesta cumplirá con la imagen de f, la relación I (fog) ⊆ I (f).

Como resumen de lo dicho, a partir de dos funciones f, g, la composición f o g es posible directamente, si Ig $\subseteq$ Df. Será entonces: D(fog) $\equiv$ Dg

Si la mencionada relación no se verifica, debe hallarse la imagen reducida I g^* / I $g^* \subseteq$ Df. Luego, hallar el dominio restringido D g^* correspondiente. Será en este caso: D (fog) $\equiv$ D g^*.

Es exactamente análogo si se busca la composición (g o f), donde debe analizarse si se verifica o no la condición I f $\subseteq$ D g, y proceder en forma similar.

Como ejemplo de aplicación de los expuesto, a partir de las funciones f y g indicadas en cada caso, se propone efectuar la composición de las funciones (f o g) y de (g o f), restringiendo el dominio cuando sea necesario. Se desarrollan dos ejemplos, para mejor clarificación de lo dicho.

Ejemplo a) Sean las funciones: $f(x) = 3x + 2$; $g(x) = x^2 + 1$

se tiene: D (f) = R ; I (f) = R ; D (g) = R ; I (g) = $[+1,+\infty)$

i) Para (f o g), se verifica la relación I (g) $\subseteq$ D (f), por lo que la composición es directa:

$(fog)(x) = 3(x^2 + 1) + 2$

con; D (fog) $\equiv$ D (g) = R y con: I (fog) = $[+5,+\infty)$, con lo que I (fog) $\subset$ I (f)

ii) Para (g o f): Se verifica la relación I (f) $\subseteq$ D (g), por lo que hay composición directa:

$(gof)(x) = (3x + 2)^2 + 1$,

siendo D (gof) $\equiv$ D (f) = R y con: I (gof) = $[+1,+\infty)$, con lo que I (gof) $\equiv$ I (g)

Ejemplo b) Sean las funciones: $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = +\sqrt{x - 4}$

Son sus dominios: D (f) = R - { 0 }; I (f) = R - { 0 }; D (g) = $[+4,+\infty)$; I (g) = R^+ U { 0 }

i) Para (f o g), no se verifica la relación I (g) $\subseteq$ D (f), por lo que es necesario hallar la imagen reducida de g: $I^*(g)$ / $I^*(g) \subseteq D(f)$.

Es entonces $I^*(g) = R^+$. A esta imagen, le corresponde el dominio restringido de g: $D^*(g) = (+4,+\infty)$.

La función compuesta es: $(f \text{ o } g)(x) = \frac{1}{+\sqrt{x - 4}}$, siendo D (fog) $\equiv$ $D^*(g) = (+4,+\infty)$

y es I(fog) = R^+ lo que verifica I (fog) $\subset$ I (f)

ii) Para (g o f): no se verifica la relación I (f) $\subseteq$ D (g), por lo que se debe determinar la imagen reducida de f:

I^* (f) / I^* (f) $\subseteq$ D (g). Es entonces, I^* (f) = [+4,+∞). Para esta imagen, encontramos que corresponde el dominio restringido de f: D^* (f) = (0,¼]

La función compuesta resulta: $(g \text{ o } f)(x) = \dfrac{1}{+\sqrt{\dfrac{1}{x} - 4}}$ con D (gof) ≡ D* (f) = (0,¼] y con

I (gof) = R^+ lo que determina I (gof) $\subset$ I (g)

Función inversa como composición de funciones

Completando el concepto ya expresado de función inversa (Fig. 12), puede aplicarse el mismo con la concepción de la composición de funciones: la aplicación sucesiva de una función f y su función inversa f^{-1}, en cualquier orden, es igual a la función identidad.

La composición de una función con su función inversa determina la función identidad:

$f \text{ o } f^{-1} = f\,[\,f^{-1}(x)\,] = x$ o $f^{-1} \text{ o } f = f^{-1}\,[\,f(x)\,] = x$

Funciones expresadas en forma paramétrica

Las componentes x e y de una función f, es decir, los (x;y) $\in$ f, pueden expresarse a través de una tercera variable llamada parámetro (t). En otras palabras, las podemos relacionar a ambas en función de esa tercera. Ello constituye la expresión de la función en forma paramétrica.

La expresión es de la forma: $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$

Para cada valor del parámetro t, con las funciones que corresponden g y h, se determina un par (x ; y) que pertenece y corresponde a la función f.

Siempre que la función g, que vincula t con x admita la función inversa g^{-1}, se podrá expresar de esta manera: $t = g^{-1}(x)$.

Si se reemplaza este valor de t en la expresión de la función h, queda $y = h\,[\,g^{-1}(x)\,]$, con lo que la función resulta dada en la forma explícita, a través de la composición de las funciones g^{-1} y h, en ese orden. Un ejemplo elemental lo constituye la función:

$\begin{cases} x = 2\,t & D\,x_t = R\ ;\ Ix = R \\ y = t & D\,y_t = R\ ;\ Iy = R \end{cases}$

Se deduce de inmediato, despejando t en la primera expresión, y reemplazándolo en la segunda, que la función es la recta: $y = \frac{1}{2}x$

Una curva clásica expresada en forma paramétrica es la cicloide:

$$\begin{cases} x = t - \text{sen } t \text{ ; con } D(x_t) = R; \; Ix = R \\ y = 1 - \cos t \text{ ; con } D(y_t) = R; \; Iy = [\,0,2\,] \end{cases}$$

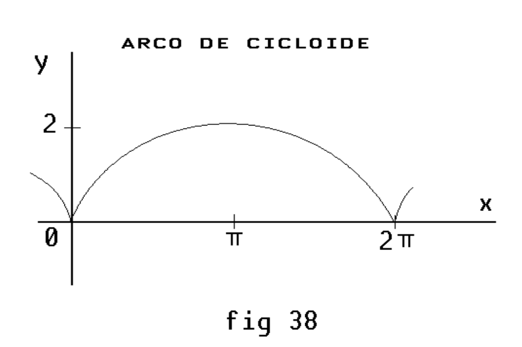


fig 38

Su gráfica está compuesta por infinitos ciclos de período 2 π.

Normalmente, en las expresiones que aparecen funciones trigonométricas, se considera un ciclo para el parámetro, con lo que es válido en $0 \leq t \leq 2\pi$.

Coordenadas polares

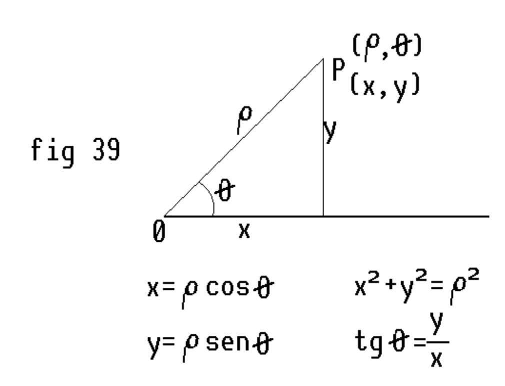


fig 39

Otra forma de representar puntos en el plano es a través de las coordenadas polares, cuyas variables son determinadas a partir de un punto origen O y una unidad medida sobre una semirrecta horizontal con origen en O, y sentido positivo hacia la derecha.

Un punto P del plano queda determinados por dos coordenadas: i) el ángulo que forma la semirrecta OP respecto de la semirrecta horizontal, medido con el sentido convencional de generación de ángulos, llamado argumento θ y ii) el valor de OP referido a la unidad del sistema, llamado módulo ρ.

De esta manera, pueden expresarse funciones en estas coordenadas, con los conceptos ya definidos para las cartesianas. Estas funciones, generalmente expresadas con las coordenadas indicadas, son de la forma: $\rho = f(\theta)$, o también sencillamente como: $\rho = \rho(\theta)$

En la figura se representa un punto cualquiera P, referido a los dos sistemas de coordenadas utilizados. La elemental relación entre las mismas determina las fórmulas de pasaje de uno a otro sistema.

De polares a cartesianas:

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \,\text{sen}\, \theta$$

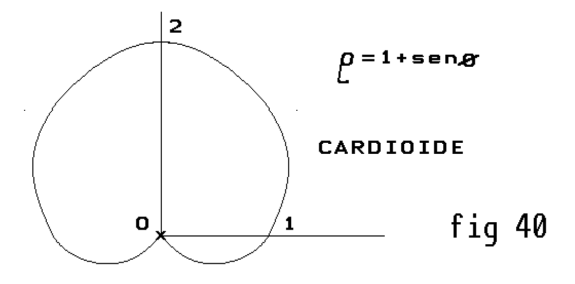
De cartesianas a polares:

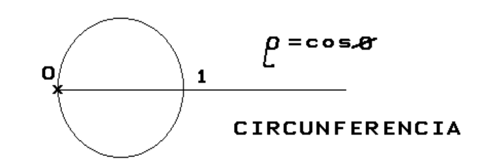
$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{arc tg}\, \theta = \frac{y}{x}$$

Algunos ejemplos de funciones expresadas en coordenadas polares son los siguientes:

$\rho = a$ (circunferencia de radio a, con centro en el origen polar).





$\rho = r$ sen θ , $\rho = r$ sen θ (circunferencias de radio r, que contienen al origen polar).

$\rho = \theta$ (espiral de Arquímedes)

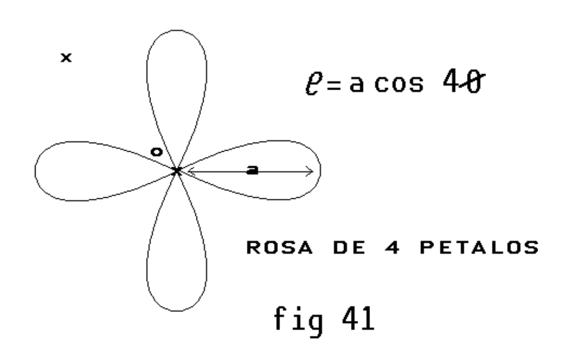
$\rho = a(1 + \cos\theta)$; $\rho = a(1 - \cos\theta)$
$\rho = a(1 +$ sen $\theta)$; $\rho = a(1 -$ sen $\theta)$
(son distintas cardioides).

$\rho =$ sen n θ ; $\rho = \cos n\theta$
("rosas" de n pétalos si n es impar, y "rosas" de 2n pétalos si n es par).

Algunos ejemplos se representan en las figuras 40 y 41.-

En la espiral de Arquímedes, los valores de θ pueden tomar valores entre $-\infty$ y $+\infty$, sin que se superponga la gráfica obtenida.

Pero en general, es suficiente considerar valores para la variable independiente entre 0 y 2π o a veces entre 0 y π para tener la gráfica completa.



Es importante determinar el rango de θ que completa la gráfica, y debe tenerse en cuenta especialmente cuando se efectúan aplicaciones que se verán más adelante.

Es interesante ver que en las "rosas" de las formas presentadas, si el número "n" es par, se necesitan los valores de 0 a 2π para representar la gráfica completa, mientras que si "n" es impar, queda graficada en su totalidad con valores de 0 a π.

Conceptos previos - Números reales - Intervalos

DISTANCIA ENTRE PUNTOS CON CONCEPTO DE VALOR ABSOLUTO

d(a,b)=|a-b|

a 0 1 b R

fig 1 CORRESPONDENCIA ENTRE PUNTOS DE LA RECTA Y NUMEROS REALES

Es necesario tener presente un concepto del álgebra concerniente a números reales, y su correspondencia biunívoca con los puntos de una recta, que asigna a cada número real un punto de una recta, y que determina para cada punto de la misma, un número real. (fig 1)

Utilizamos también la relación de orden entre los números reales, en la que se cumple siempre que: a > b , o, a = b , o, a < b, y el concepto de distancia, relacionado con el de valor absoluto para los mismos.

$$d(a,b) = \left| a - b \right| = \begin{cases} a - b & \text{si } a \geq b \\ b - a & \text{si } a < b \end{cases}$$

Con estos conceptos previos, decimos que se llama intervalo cerrado entre los números reales a, b, con a < b simbolizado [a , b], (fig 2) al conjunto:

$$[a, b] = \{ x / x \in R \wedge a \leq x \leq b \}$$

Se llama intervalo abierto entre los números reales a, b, con a < b, y se simboliza (a , b), al conjunto:

$$(a, b) = \{ x / x \in R \wedge a < x < b \}$$

Se definen también como intervalos semiabiertos o intervalos semicerrados, (fig 2) a los conjuntos:

$$(a, b] = \{ x / x \in R \wedge a < x \leq b \}$$
$$[a, b) = \{ x / x \in R \wedge a \leq x < b \}$$

[a,b]
(a,b)
[c,+∞)
(−∞,c]

fig 2

Finalmente, señalamos los distintos posibles intervalos infinitos, que son abiertos en más y menos infinito, y pueden ser abiertos o cerrados en el extremo finito del mismo:

$$(-\infty, c) = \{ x / x \in R \wedge x < c \} \qquad (-\infty, c] = \{ x / x \in R \wedge x \leq c \}$$
$$(c, +\infty) = \{ x / x \in R \wedge c < x \} \qquad [c, +\infty) = \{ x / x \in R \wedge c \leq x \}$$

El intervalo que comprende la totalidad de los números reales, puede indicarse como abierto en más y menos infinito:

$$(-\infty, +\infty) = \{ x / x \in R \}$$

Entorno, Entorno reducido

Se define como entorno de centro en el punto "a" y radio h, siendo a y h reales : a, h $\in$ R , y con h > 0, y, simbolizado con E (a , h) al intervalo abierto (a - h , a + h).

$E(a, h) = (a - h, a + h)$.

Cuando no resulta necesario precisar el valor del radio, simplemente se indica como E (a).

La expresión del entorno así definido puede efectuarse como conjunto en forma de intervalo o con el concepto de módulo o distancia.

$E(a,h) = \{ x / a - h < x < a + h \}$ o
$E(a,h) = \{ x / |x - a| < h \}$ (fig 3)

Así se expresa un conjunto infinito de puntos sobre la recta, o un conjunto de números de R.

Se define entorno reducido de centro en el punto "a" y radio h, con a , h $\in$ R , con h > 0, y simbolizado como $E'(a, h)$, a la unión de los intervalos (a – h , a) U (a , a + h).

fig 3

Entorno reducido es, el anteriormente definido como entorno, excluido su centro "a".

$E'(a, h) = (a - h, a) \cup (a, a + h)$

También es usual representarlo simplemente como E' (a), si no se requiere precisar el radio.

En forma análoga al anterior se puede expresar un entorno reducido en forma de intervalo o como módulo o distancia.

$E'(a, h) = \{ x / x \neq a \wedge a - h < x < a + h \}$ o
$E'(a, h) = \{ x / 0 < |x - a| < h \}$

Punto de acumulación

Consideramos un conjunto C tal que C $\subseteq$ R , y un punto p tal que p $\in$ R.

Se dice que p es punto de acumulación respecto del conjunto C o simplemente que p es PA del conjunto C, si todo entorno reducido de p contiene al menos un punto del conjunto C.

En símbolos: p es P.A. de C $\Leftrightarrow \forall E'(p) : \exists x / x \in C \wedge x \in E'(p)$
o, lo que es exactamente equivalente: p es P.A. de C $\Leftrightarrow \forall E'(p) : E'(p) \cap C \neq \emptyset$

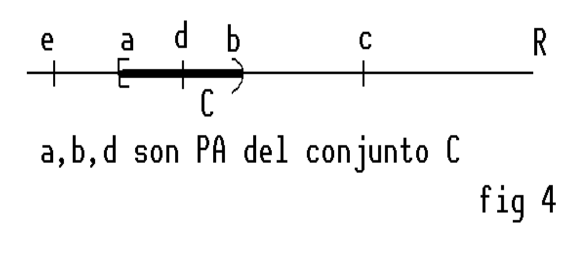
El análisis de la definición de este concepto nos permite deducir varias conclusiones, que dependerán siempre de las características del conjunto C y del punto p respecto del mismo.

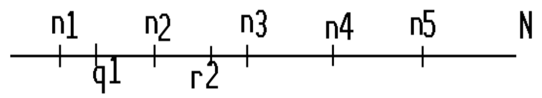
Es necesario reiterar que la definición requiere que para cualquier entorno reducido del punto se cumpla con la condición de contener puntos del conjunto C.

Es inmediato, aplicando estrictamente la definición, determinar que (fig 4):

i) Si C es un intervalo cerrado [a , b] de R, todos los puntos del mismo son de acumulación respecto del mismo conjunto.

ii) Si C es un intervalo abierto (a , b) de R, todos los puntos del mismo son de acumulación respecto del mismo, y también los puntos extremos a y b, aunque no pertenecen al mismo.





r1 r2 r3 R

todos los r_i son PA del conjunto R

iii) El conjunto de los números naturales N no tiene ningún punto de acumulación respecto de él. No lo son los pertenecientes a N, y tampoco los números reales que no son naturales.

iv) Todo número irracional es punto de acumulación respecto del conjunto Q de los racionales.

v) Todos los puntos del conjunto R son de acumulación respecto del mismo.

vi) Si C es un intervalo real, abierto o cerrado (a , b), no son puntos de acumulación respecto de ese intervalo, aquellos puntos p para los cuales se verifique que p < a o p > b.

Como resumen de lo dicho, se concluye de la definición y de las interpretaciones y ejemplos dados, que <u>la pertenencia o no de un punto al conjunto de referencia, no asegura ni excluye su condición de punto de acumulación</u>.

Un conjunto infinito de puntos aislados no tiene puntos de acumulación pertenecientes a él, ni tampoco es punto de acumulación un punto aislado respecto del conjunto de referencia.

No es posible que un punto aislado sea de acumulación respecto de un conjunto, pertenezca o no a él.

Si un punto no es aislado respecto del conjunto, será de acumulación, tanto si pertenece a él, como no pertenezca.

Limite de una función

Analizamos una función, por ejemplo, sea: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$, para la cual su dominio es R - { 3 }, y hallamos los valores de la misma en las proximidades del punto x = 3, considerando tanto valores menores como mayores que 3, y la graficamos, se obtiene la figura (fig 5) que

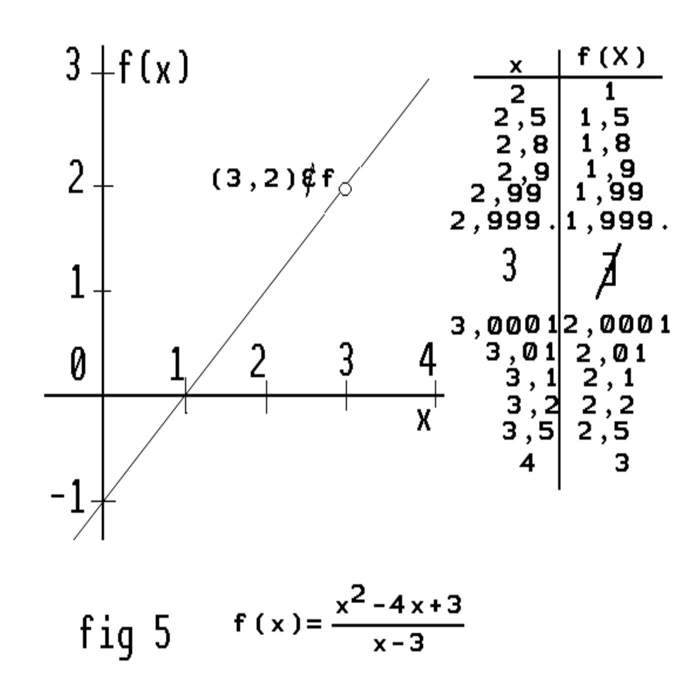
representa casi la totalidad de la recta de ecuación y = x - 1 con la única excepción del par (3 ; 2) que pertenecería a la recta, pero no pertenece a la función f(x).

Es evidente que los valores de la función son más y más próximos al valor 2, cuanto más cercanos a 3 sean los valores que consideramos del dominio.

Observamos que no tenemos en cuenta el valor 3. (obvio, ya que 3 no pertenece a su dominio)

Se concluye entonces, que es posible obtener aproximación del valor de la función al valor 2 tanto como se quiera, con tal de que el dominio sea considerado lo suficientemente próximo a 3.

En estas condiciones, el lenguaje cotidiano nos induce a expresar que el límite de la función f(x), cuando x se aproxima a 3, es 2.



Definición

Consideramos ahora una función f: R ———> R cuyo dominio sea D(f), obviamente D(f) $\subseteq$ R, y un punto a $\in$ R, que sea punto de acumulación respecto de D(f).

Se destaca que este último requerimiento no exige la pertenencia del punto "a" al dominio de la función, sino, que no sea aislado respecto del mismo.

En esas condiciones, decimos que:

El límite de la función f en el punto a de acumulación de su dominio será el valor L, real finito, sí y sólo si, para cualquier valor ε arbitrariamente pequeño y positivo, existe un valor δ también positivo (en general δ depende de ε), de manera que para todo valor x del dominio de la función perteneciente al entorno reducido de centro "a" y radio δ, se verifica que la función pertenece al entorno de centro L y radio ε.

En símbolos, la definición formal se expresa así:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, siendo a, PA de Df, sí y sólo si:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \ / \ \forall\ x: x \in Df \wedge x \in E'(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in E(L, \varepsilon)$

($\delta = \delta(\varepsilon)$)

El razonamiento que efectuamos para interpretar la definición y que nos clarifica de la misma, hace que primero se fija un radio arbitrario ε para determinar el E (L), y obtener así el δ que determina el E' (a). (fig 6)

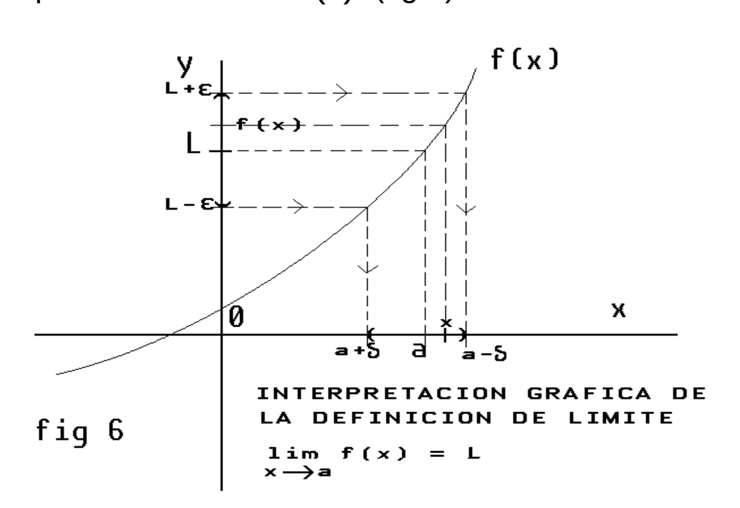


fig 6

Obtenido E' (a), se verifica si para cualquier valor x perteneciente a este entorno reducido y al Df, se cumple que el valor de la función f (x) pertenece al entorno E (L).

Verificación de límites por definición

Para comprobar que un límite determinado corresponde a una función dada en un punto de acumulación de su dominio, el razonamiento y metodología de dicha verificación aplicará el concepto que está expresado en la definición.

Esa definición tiene básicamente dos partes:

1) Verificar que dado un ε arbitrario, existe su correspondiente δ, y 2) Comprobar que todo punto x que pertenece al entorno reducido de centro a, determina que la función f(x) pertenezca al entorno de L.

Para ello, se deducen los pasos algebraicos necesarios a partir de la expresión de cada entorno, operando en forma de intervalos o como módulos.

1) La expresión del entorno de L y radio arbitrario ε, se compara con la del entorno reducido de centro a y radio a determinar δ, con lo que se obtiene (en general) δ = δ (ε).

Esta relación, además, debe verificar que si ε se elige cada vez menor, δ es positivo, y también se aproxima a cero.

$$\left\{\begin{array}{l} L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \\ \qquad \Downarrow \qquad\qquad \Rightarrow \quad \delta = \delta(\varepsilon) \\ a - \delta < x < a + \delta \quad (x \neq a) \end{array}\right.$$

2) En lo que constituye el camino inverso del razonamiento anterior, debe verificarse que para todo punto x del dominio y del entorno reducido, se cumple que la función pertenece al entorno de centro en L y radio ε.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{si: } a - \delta < x < a + \delta \quad (x \neq a) \\ \qquad \Downarrow \\ L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \end{array}\right.$$

Lo ejemplificamos con un caso sencillo, utilizando las dos nomenclaturas para los entornos. Sea, verificar si $\lim_{x \to 3} (2x - 4) = 2$

Expresando los entornos como intervalos:

i) Partimos de: $2 - \varepsilon < 2x - 4 < 2 + \varepsilon$ (1)

para compararlo con: $3 - \delta < x < 3 + \delta$ $(x \neq 3)$ (2)

De (1), a través de operaciones algebraicas válidas, se deberá dejar esa desigualdad, con la x en el término intermedio de la misma, para poder compararla con la (2) y encontrar la relación general entre δ y ε. Será:

$2 - \varepsilon < 2x - 4 < 2 + \varepsilon$ (1)

$\Downarrow$ sumando 4

$6 - \varepsilon < 2x < 6 + \varepsilon$

$\Downarrow$ dividiendo por 2 (>0)

$3 - \varepsilon/2 < x < 3 + \varepsilon/2$ (3)

de la comparación de las expresiones: (2) (expresión del entorno reducido con centro en 3) y (3) (desigualdad obtenida a partir del entorno de centro en 2), se obtiene: $\delta = \varepsilon/2$, con lo que se verifica la primera parte de la definición, que requiere que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$

ii) Ahora se debe partir de la condición de que $\forall$ x, con $x \neq 3$, se verifique que la función pertenece al entorno de 2:

si: $3 - \varepsilon < x < 3 + \delta$ (con $x \neq 3$)

$\Downarrow$ y como $\delta = \varepsilon/2$

$3 - \varepsilon/2 < x < 3 + \varepsilon/2$

$\Downarrow$ multiplicando por 2 (>0)

$6 - \varepsilon < 2x < 6 + \varepsilon$

$\Downarrow$ restando 4

$2 - \varepsilon < 2x - 4 < 2 + \varepsilon$

verifica la segunda parte de la definición de límite, ya que asegura que $\forall$ x del entorno reducido de centro 3 y radio δ, $f(x) = 2x - 4$, pertenece al entorno de centro 2 y radio arbitrario ε.

Los pasos de esta segunda parte son, en general, los opuestos de la primera, y este camino "de ida y vuelta" permite verificar que se cumplen las dos condiciones exigidas en la definición de límite.

Análogo mecanismo se aplica expresando los entornos como módulos:

i) A partir de: $|(2x - 4) - 2| < \varepsilon$ (1)

se busca comparar con: $|x - 3| < \delta$ (2)

Con el mismo objeto que antes, determinar la relación que vincula δ y ε.

Operamos desde (1)

$|(2x - 4) - 2| < \varepsilon$ (1)

operando $\Downarrow$

$$|2x - 6| < \varepsilon$$

factoreando $\Downarrow$

$$|2(x - 3)| < \varepsilon$$

por prop. de módulos $\Downarrow$

$$|2|\,|x - 3| < \varepsilon$$

dividiendo por 2 (>0)

$$|x - 3| < \varepsilon/2 \qquad (3)$$

de la comparación entre (2) y (3) surge la misma relación: $\delta = \varepsilon/2$

con lo que nuevamente se verifica que $\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \ \delta > 0$

ii) Ahora, se sigue el camino inverso que comprueba la segunda parte, partiendo de:

$$0 < |x - 3| < \delta$$

como $\delta = \varepsilon\,/2$ $\Downarrow$

$$|x - 3| < \varepsilon/2$$

multiplicando por 2 (>0) $\Downarrow$

$$2\,|x - 3| < \varepsilon$$

por prop. de módulos $\Downarrow$

$$|2x - 6| < \varepsilon$$

por aritmética elemental $\Downarrow$

$$|(2x - 4) - 2| < \varepsilon$$

lo que cumple la condición

Es evidente que la verificación de límites por definición, con la metodología expuesta puede presentar cada vez mayores dificultades al tratarse de funciones más complejas que la lineal mostrada como ejemplo, y llega a ser hasta imposible despejar algebraicamente las expresiones para llegar a determinar δ en función de ε

El cálculo de límites se efectúa entonces en la práctica a partir de los límites de las funciones elementales y de las propiedades de los límites, que se comienzan ahora a desarrollar. Esto permitirá luego su cálculo sin recurrir a la verificación por definición, que puede ser engorrosa.

Limites finitos de funciones elementales

Es inmediato determinar por verificación, según definición, los límites de estas funciones elementales, que se propone como ejercitación según la forma desarrollada en el ejemplo dado:

Función constante: f (x) = k

Se verifica que $\forall\ k \in R$: $\lim\limits_{x \to a} k = k \qquad \forall\ a \in R$

Función identidad: f (x) = x

Se verifica : $\lim\limits_{x \to a} x = a \qquad \forall\ a \in R$

Función lineal: f (x) = m x + n

Se verifica : $\lim_{x \to a} (mx + n) = ma + n \quad \forall a \in R$

Propiedades de los limites – Teoremas

Teorema de la unicidad del límite

Este teorema expresa la propiedad que es fundamental en los límites.

Si una función f tiene límite L en el punto a de acumulación de su dominio, entonces ese límite es único.

En símbolos: si $\exists \lim_{x \to a} f(x) = L \Rightarrow$ L es único

Demostración:

La demostración se efectúa por el método del absurdo, suponiendo que existen dos valores diferentes L_1 y L_2 distintos, para el límite de la función f en a. Es decir, se parte de suponer que:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = L_1, \quad \text{y también} \quad \exists \lim_{x \to a} f(x) = L_2 \quad \text{con } L_1 \neq L_2$$

En esta hipótesis, en que $L_1 \neq L_2$, podemos considerar uno cualquiera mayor que el otro, por ejemplo, L_1 mayor que L_2.

Elegimos un ε de valor $\varepsilon = \frac{L_1 - L_2}{2}$ de manera que entonces los entornos que así se forman, E (L_1, ε) y E (L_2, ε) no tienen ningún punto en común.

La suposición inicial en esta demostración de que L_1 y L_2 son límites de la función f en a, por la definición de límite, nos indica que existen ciertamente entornos reducidos con centro en a, de radios δ_1 y δ_2 respectivamente, para los que se debe cumplir en cada caso:

si $x \in E'(a, \delta_1) \Rightarrow f(x) \in E(L_1, \varepsilon)$, y
si $x \in E'(a, \delta_2) \Rightarrow f(x) \in E(L_2, \varepsilon)$.

Si se considera un radio δ único, el menor entre los δ_1 y δ_2, es decir, tal que verifica lógicamente: $E'(a,\delta) \subseteq E'(a,\delta_1)$ y $E'(a,\delta) \subseteq E'(a,\delta_2)$, para este entorno de centro a y radio δ se debería verificar la condición de límite para los dos valores supuestos. O sea que:

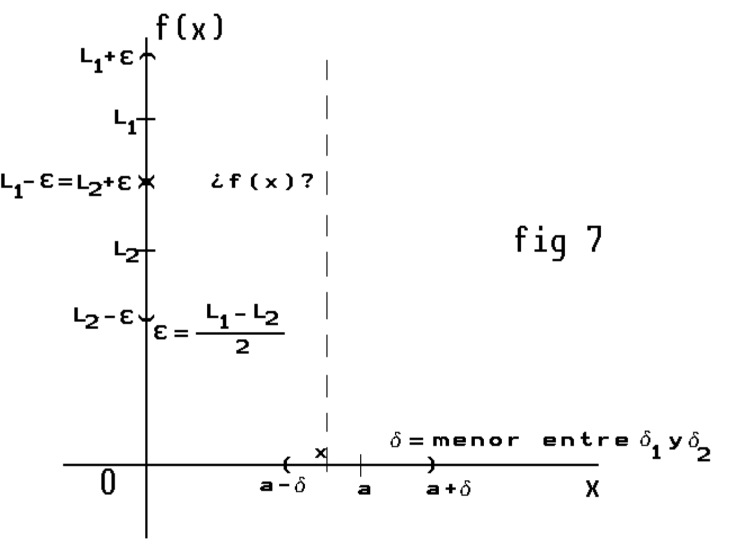
$$\left.\begin{array}{l} \text{si } x \in E'(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(L_1, \varepsilon) \\ \text{si } x \in E'(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(L_2, \varepsilon) \end{array}\right\} \text{simultáneamente (1)}$$

Como $E(L_1,\varepsilon) \cap E(L_2,\varepsilon) = \varnothing$, y f(x) es un valor único por definición de función, es imposible (absurdo), que f(x) pertenezca simultáneamente a ambos entornos, como lo indica la condición (1).

Este absurdo evidente proviene de suponer la existencia de dos límites distintos $L_1 \neq L_2$, lo que demuestra que ello no es posible, por lo que resulta $L_1 = L_2 = L$, es límite <u>único</u> de la función f en el punto a. La interpretación gráfica de este teorema está indicada en la figura (fig 7).

Por ser $\varepsilon = \dfrac{L_1 - L_2}{2}$, es inmediato que

$L_1 - \varepsilon = L_2 + \varepsilon$ (2)



por lo que otra forma de llegar a la misma conclusión, es a partir de las expresiones (1) con la nomenclatura de intervalo, los que equivalen a:

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow L_1 - \varepsilon < f(x) < L_1 + \varepsilon \\ \text{si } a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow L_2 - \varepsilon < f(x) < L_2 + \varepsilon \end{array}\right\} \quad (3)$$

de las expresiones (3), y la igualdad de (2), resulta:

$$L_2 - \varepsilon \underline{\underline{< f(x) <}} L_2 + \varepsilon = L_1 - \varepsilon \underline{\underline{< f(x) <}} L_1 + \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(x)$$: absurdo y así queda demostrado.

<u>Teorema de la estricción</u>

Sean tres funciones f, g, h, con D (f), D (g) y D (h), y un punto a que sea punto de acumulación, PA de los tres dominios. Si se verifica que:

i) Los límites de dos de ellas en ese punto a son iguales: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$

ii) Existe un entorno reducido de centro en a, dentro del dominio común a las tres funciones, para el que se verifica, para todo x del mismo, la desigualdad $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, lo que indicamos así:

: $\exists E'(a,\delta) / \forall x \in E'(a, \delta) \wedge x \in D(f) \cap D(g) \cap D(h) \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (1)

Entonces, se cumple que $\lim_{x \to a} g(x) = L$

<u>Demostración:</u>

De la definición de límite, aplicada a las funciones f y h, para un mismo ε arbitrario, existen los δ_1 y δ_2 respectivos, de forma que:

para $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, existe: $a - \delta_1 < x < a + \delta_1$
para $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, existe: $a - \delta_2 < x < a + \delta_2$

Si se toma como δ al menor entre δ_1 y δ_2, lo que equivale a considerar como entorno al E' que será, por lógica: $E'(a, \delta) \subseteq E'(a, \delta_1)$ y $E'(a, \delta) \subseteq E'(a, \delta_2)$, para este entorno reducido que es $E'(a, \delta)$, la definición de límite nos asegura que se cumplen, simultáneamente

$$\text{si } a - \delta < x < a + \delta \rightarrow \begin{cases} L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \ \ (2) \\ L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \ \ (3) \end{cases}$$
$(x \neq a)$

Considerando los dos primeros términos de (2), los dos últimos de (3), y con la condición (1) de la hipótesis, se obtiene la siguiente expresión:

$$a - \delta < x < a + \delta \rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon \text{ , o sea:}$$

$$a - \delta < x < a + \delta \rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

lo que asegura, por definición de límite, que se cumple la tesis: $\lim_{x \to a} g(x) = L$

Operaciones con límites - Álgebra de límites

Ya dijo que la forma operativa de determinar un límite no se realiza verificándolo por definición, sino que se aplican sus propiedades, entre las que se encuentran las operaciones de suma, resta, producto y cociente de límites, conformando globalmente la llamada álgebra de los límites.

Considerando dos funciones f y g, cuyos límites en a, son genéricamente L_1 y L_2, lo que expresamos como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = L_2$$

Se definen y verifican las siguientes operaciones entre límites, demostrables a partir de la definición formal de límite que se enunciara:

Suma de límites:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} (f + g)(x) = L_1 + L_2$$

Resta de límites:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} (f - g)(x) = L_1 - L_2$$

Producto de límites:

$$\lim_{x \to a} [f(x) . g(x)] = \lim_{x \to a} (f . g)(x) = L_1 . L_2$$

Cociente de límites:

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{L_1}{L_2} \quad \text{con } L_2 \neq 0$$

En resumen, el límite de la suma, resta, producto o cociente de funciones, es respectivamente igual a la suma, resta, producto o cociente de sus límites, con la lógica restricción en el caso de cocientes, de que el límite de la función denominador no sea cero.

Demostración de la suma de límites La hipótesis es:

Si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$; $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ $\rightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = L_1 + L_2$

Si se aplica la definición de límite a ambas funciones f y g, para ε positivos y arbitrarios ε_1 y ε_2, que determinan δ_1 y δ_2, utilizando expresión de intervalo para los entornos, se verifica:

$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists\ \delta_1 > 0 \ / \ \forall x : x \in D f \wedge a - \delta_1 < x < a + \delta_1\ (x \neq a) \Rightarrow L_1 - \varepsilon_1 < f(x) < L_1 + \varepsilon_1$

$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists\ \delta_2 > 0 \ / \ \forall x : x \in D g \wedge a - \delta_2 < x < a + \delta_2\ (x \neq a) \Rightarrow L_2 - \varepsilon_2 < g(x) < L_1 + \varepsilon_2$

Considerando como radio δ al menor entre δ_1 y δ_2, y para x pertenecientes a puntos comunes a Df y a Dg, se cumplen ambas condiciones:

$\forall x : x \in Df \cap Dg \wedge a - \delta < x < a + \delta \quad (x \neq a) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1 - \varepsilon_1 < f(x) < L_1 + \varepsilon_1 \\ L_2 - \varepsilon_2 < g(x) < L_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Sumando la desigualdad miembro a miembro, y haciendo $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, por ser ε_1 y ε_2 arbitrariamente pequeños, su suma es tan pequeña como se quiera, con lo que resulta, con $\varepsilon > 0$:

$\forall x : x \in Df \cap Dg \wedge a - \delta < x < a + \delta \quad (x \neq a) \Rightarrow$

$L_1 + L_2 - \varepsilon < f(x) + g(x) < L_1 + L_2 + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (L_1 + L_2) - \varepsilon < (f+g)(x) < (L_1 + L_2) + \varepsilon$

con lo que, por definición de límite esta expresión afirma que: $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = L_1 + L_2$

y, por ser L_1 y L_2 los límites de f (x) y g (x) respectivamente, se verifica la tesis:

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = L_1 + L_2 = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

Con metodologías similares, y utilizando como en el ejemplo de la suma la definición dada para el límite de una función, se demuestran las expresiones dadas para las otras operaciones de resta, cociente y producto de límites.

A partir de los límites elementales ya señalados, y con estas propiedades para las operaciones básicas, se logra inmediatamente la posibilidad de determinación de algunos límites por propiedades.

Como ejemplo, si f (x) es una función polinómica cualquiera f (x) = P (x), es inmediato calcular el límite de P (x) para cualquier punto c.

Sea probar que: $\lim\limits_{x \to c} P(x) = P(c)$ con $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

El límite de ese polinomio genérico, por suma de límites, es el límite de la suma de cada uno de sus términos.

Cada término, a su vez, es una constante por una potencia de x, con lo que el límite de cada término es igual al producto del límite de la constante (ella misma), por el límite de la potencia de x.

Finalmente, como una potencia de x, no es más que el producto de n veces la misma, su límite será n veces el límite de la función identidad, es decir, n veces c. En resumen :

$$\lim_{x\to c} x^n = \left(\lim_{x\to c} x\right).\left(\lim_{x\to c} x\right).\left(\lim_{x\to c} x\right)...\left(\lim_{x\to c} x\right) = c.c.c...c = c^n$$

$$\lim_{x\to c} a_n.x^n = \left(\lim_{x\to c} a_n\right).\left(\lim_{x\to c} x^n\right) = a_n.c^n \quad (\text{para todo } n)$$

$$\lim_{x\to c} P(x) = \lim_{x\to c} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0\right) =$$

$$= \lim_{x\to c} \left(a_n x^n\right) + \lim_{x\to c} \left(a_{n-1}x^{n-1}\right) + ... + \lim_{x\to c} \left(a_1 x\right) + \lim_{x\to c} \left(a_0\right) =$$

$$= a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + ... + a_1 c + a_0 = P(c)$$

Así se sigue el cálculo de límites aplicando operaciones y propiedades, con total practicidad.

Otras propiedades

Agregamos, dejando las demostraciones como posible práctica, a partir de la definición de límite y de las operaciones básicas ya enunciadas, las siguientes propiedades:

i) El límite del logaritmo de una función f en un punto a, es igual al logaritmo del límite de dicha función f en a.

$$\lim_{x\to a} [\ \log_b f(x)\ ] = \log_b [\lim_{x\to a} f(x)\ ] \qquad (\ b>1\ )$$

ii) El límite de una base constante k elevada a una función f en un punto a, es igual a la base k elevada al límite de la función f en a.

$$\lim_{x\to a} \left[k^{f(x)}\right] = \left[k\right]^{\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]}$$

iii) El límite de una función base f elevada a otra función exponente g en un punto a, es igual al límite de la función base en a, elevada al límite de la función exponente también en a.

$$\lim_{x\to a} \left[f(x)^{g\ (x)}\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]} \qquad \text{con } (\text{lím } f(x) > 0)$$

Límite de una función trigonométrica

Las propiedades hasta ahora vistas no permiten resolver el límite de una función trigonométrica, por lo que deben determinarse por lo menos los límites de las funciones seno y coseno a partir de la definición.

Sea entonces, verificar:

$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$, $\forall a \in R$. Como Df = R, se cumple que a es PA (punto de acumulación) de Df

Es más cómodo verificar este límite usando nomenclatura de módulo, por lo que se parte de:

(1) $\left| \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a \right| < \varepsilon$ con $x \neq a$, por fórmulas de trigonometría:

(2) $\left| \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a \right| = \left| 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - a).\cos \frac{1}{2}(x + a) \right|$, por prop de módulo

(3) $\left| 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - a).\cos \frac{1}{2}(x + a) \right| = 2 \left| \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - a) \right| . \left| \cos \frac{1}{2}(x + a) \right|$

y como para el seno o coseno de cualquier ángulo se cumple que $\left| \cos \theta \right| \leq 1$

será: $\left| \cos \frac{1}{2}(x + a) \right| \leq 1$, con lo que, componiendo y reemplazando en (2) y (3), queda:

(4) $\left| \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a \right| = 2 \left| \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - a) \right| . \left| \cos \frac{1}{2}(x + a) \right| \leq 2 \left| \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - a) \right|$

además, para todo ángulo : $\left| \operatorname{sen} \theta \right| < \left| \theta \right|$, si $\theta \neq 0$, con lo que

$\left| \operatorname{sen} \frac{1}{2} (x - a) \right| < \left| \frac{1}{2} (x - a) \right|$, ya que $x \neq a$, y elementalmente

$$(5) \quad 2 \left| \operatorname{sen} \frac{1}{2} (x - a) \right| < 2 \left| \frac{1}{2} (x - a) \right| = \left| (x - a) \right|$$

De (4) y (5), eliminando los términos intermedios de las desigualdades, queda en definitiva:

$\left| \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a \right| < \left| (x - a) \right|$, con $x \neq a$, y como por (1) : $\left| \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a \right| < \varepsilon$

comparando con: $0 < \left| x - a \right| < \delta$, y haciendo $\varepsilon = \delta$ resulta que, si:

$0 < \left| x - a \right| < \delta \Rightarrow 0 < \left| x - a \right| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \left| \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a \right| < \varepsilon$,

lo que prueba el límite propuesto.

Un razonamiento similar nos lleva a demostrar que: $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$, $\forall a \in R$

Los límites de las restantes funciones trigonométricas, se determinan aplicando las propiedades del álgebra de límites, con las restricciones lógicas cuando se trata de aplicar un cociente.

Por ejemplo: $\lim_{x \to a} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$

Expresión válida cuando no se anula el denominador: cos a ≠ 0, lo que ocurre para a = $\frac{1}{2}\pi$, y para todos los múltiplos impares de $\frac{1}{2}\pi$. Debe ser, entonces a ≠ (n + 1) $\frac{1}{2}\pi$

Algunos ejemplos de cálculo de límites - Límites 0/0

La aplicación del álgebra de límites no presenta dificultad alguna para la resolución de los problemas que no presenten operaciones prohibidas, como la división por cero, y en los casos en que el resultado sea una indeterminación.

Así, por ejemplo, es elemental resolver $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 4x}{8x^2 - 1}$ ya que es $= \frac{2\pi}{2\pi^2 - 1}$

Pero no tenemos por el momento, respuesta para este próximo límite, que por propiedades, “resulta”:

$\lim_{x \to 4} \frac{3x + 2}{8 - 2x} = \frac{8}{0} =$???, ya que $\frac{8}{0}$ es expresión sin respuesta en matemática.

Si en cambio, se trata de resolver aplicando propiedades:

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$, el resultado es $\frac{0}{0}$, que es una indeterminación,

y que nunca se podrá aceptar como resultado final de un cálculo de límite: habrá que resolverla.

No existe una metodología única para salvar una indeterminación, pero lo que puede indicarse con carácter general, es que se deberá buscar la transformación algebraica que permita efectuar una simplificación, dividiendo el numerador y el denominador por igual factor, en busca de salir de la situación de indeterminación.

En este ejemplo, como 3 anula el denominador y el denominador, es raíz de los respectivos polinomios, por lo que admiten el factor x - 3. Es por ello, que factoreando de esa manera, queda:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3).(x - 1)}{(x - 3)} = \lim_{x \to 3} (x - 1) = 2$$

Debe tenerse muy en cuenta que la simplificación que se efectúa al dividir numerador y denominador por x - 3, es válida siempre y cuando x sea distinto de 3, es decir, salvo cuando el denominador es cero.

Si no estuviera el símbolo de la operación "lím", con el concepto que el mismo implica, se debería consignar al simplificar que " x ≠ 3 ".

Precisamente el concepto de límite que se ha definido, y que considera el entorno reducido del punto 3, por lo que no tiene en cuenta lo que ocurre precisamente en x = 3, permite la simplificación directamente, sin aclaración alguna, pero no debe perderse de vista este aspecto fundamentalmente conceptual.

Se ha visto que fue necesario efectuar una simplificación en numerador y denominador para romper la indeterminación, como se expresara.

Un ejemplo en que el paso algebraico previo a la simplificación no es un factoreo, sería resolver:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{0}{0}$$

En este caso, la operación previa a la simplificación será la multiplicación del numerador y denominador por el factor conjugado del numerador: $\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)$, para lograr la expresión de suma por diferencia de esas bases. Resulta así:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right).\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a).\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(x-a).\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Los pasos expuestos en los ejemplos son solamente algunas formas, ya que es importante destacar que hay muy variados artificios con el objeto de buscar, siempre, una simplificación y poder salvar la indeterminación a que se hubiera arribado al aplicar álgebra del cociente.

<u>Un límite particular:</u> $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}$

El propósito es demostrar que el límite mencionado vale 1

En la figura 8, que representa una parte de la circunferencia trigonométrica de radio r = 1, en la que se indica un ángulo genérico x, mientras que la representación del arco x, y de las funciones sen x, cos x, y tg x son las indicadas.

<u>Suponiendo que x > 0</u> se forman las figuras de un triángulo menor OAM, un sector circular AOM, y un triángulo mayor OAC.

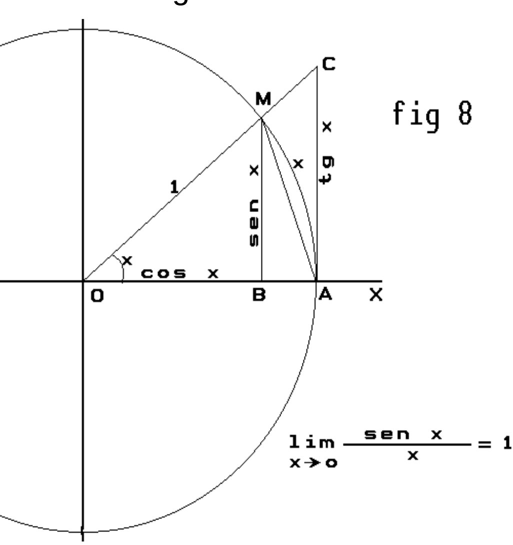
Precisamente la relación obvia entre las áreas de las mencionadas figuras es:

triángulo OAM < sector circular AOM < triángulo OAC (1)

Las áreas de las figuras indicadas en la desigualdad, son:

$$(2)\begin{cases}\text{triángulo OAM} = \tfrac{1}{2}\,.\,1\,.\,\text{sen } x\\ \text{sector AOM} = \tfrac{1}{2}\,.\,1\,.\,x\\ \text{triángulo OAC} = \tfrac{1}{2}\,.\,1\,.\,\text{tg } x\end{cases}$$

Reemplazando (2) en (1), y dividiendo miembro a miembro por ½ (½ > 0):



$\text{sen } x < x < \text{ tg } x$, (3) y dividiendo por sen x (>0)

$1 < \dfrac{x}{\text{sen } x} < \dfrac{1}{\cos x}$, invirtiendo los tres miembros, se tiene:

$1 > \dfrac{\text{sen } x}{x} > \cos x$, (4) para x > 0

Idéntica relación de superficies se presenta para un ángulo negativo x < 0, pero como precisamente si x es negativo, - x es positivo, en tanto que sen (-x) = sen x, y tg (-x) = tg x, por lo que la relación equivalente a la (3) resulta ser:

$\text{sen } x > x > \text{ tg } x$, y dividiendo por sen x (<0)

$1 < \dfrac{x}{\text{sen } x} < \dfrac{1}{\cos x}$, invirtiendo como antes los tres miembros, se tiene:

$1 > \dfrac{\text{sen } x}{x} > \cos x$, (5) para x > 0

Las relaciones (4) y (5) son idénticas, y han sido obtenidas tanto para x > 0 como para x < 0, lo que equivale a decir que son válidas en un entorno reducido de centro en 0, siendo entonces de aplicación el teorema de la estricción para el punto x = 0, considerando las funciones:

f (x) = 1 ; g (x) = $\dfrac{\text{sen } x}{x}$; h (x) = cos x

Y dado que se verifica que: $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

La aplicación del teorema de la estricción determina que $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{x} = 1}}$

Es inmediato deducir también que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x} = 1$

Este límite que se ha deducido, permite extenderlo al caso en que se necesite calcular:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } mx}{mx}$ siendo m, cualquier número real

En este caso, se aplica una metodología que va a ser muy corriente en desarrollos posteriores, que es efectuar un cambio de variable, y llamar en este caso, por ejemplo, z = m x

El nuevo límite deberá expresarse en variable z, teniendo en cuenta la sustitución efectuada, para determinar el valor correspondiente a la nueva variable en que se considera el límite:

Si antes x → 0, será ahora mx → 0, por lo que corresponde z → 0. Queda entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } mx}{mx} = \text{(con } z = mx) = \lim_{z\to 0} \frac{\text{sen } z}{z} = 1$$

No existencia de límite - Límites laterales

Consideramos la función "parte entera" indicada como f (x) = [x], cuya gráfica es la de la fig 9.

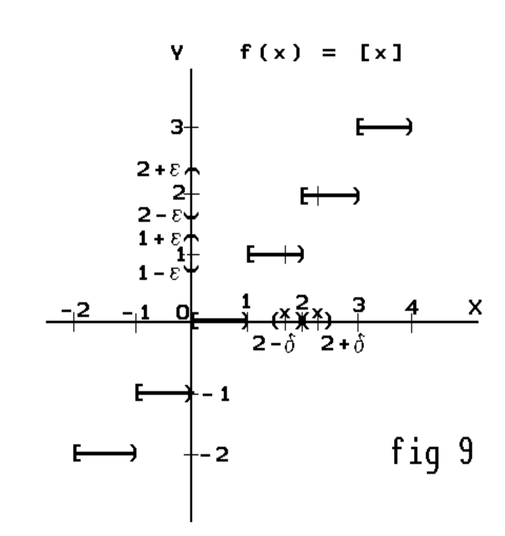


fig 9

La definición de esta función es precisamente considerar la parte entera de la variable x. Coincide con x si x es un entero, y toma el valor del entero inmediato anterior, si x no es un entero.

Se efectúa el análisis de esta función a partir de la definición de límite formal, que recordamos:

$\lim_{x\to a} f(x) = L$, siendo a, PA de Df, sí y sólo si: $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \ / \ \forall\ x: x \in Df \wedge x \in E'(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(L,\varepsilon)$
($\delta = \delta(\varepsilon)$)

Si no se verifica esta definición tal cual es expresada, significa que el límite L de la función no es el indicado. Es necesario tener presente que L es un número real, finito.

En casos como el de la función f (x) = [x], se cumple la definición de límite cuando el punto para el que se determine sea un valor a no entero. Es evidente, el resultado en estos ejemplos:

$$\lim_{x\to 3,675} [\ x\ ] = 3 \qquad \lim_{x\to -1,333} [\ x\ ] = -2$$

Si se quiere, en cambio, determinar el valor del límite en un valor entero, por ejemplo:

$\lim_{x\to 2} [\ x\ ] = ???$ No existe, $\nexists$, no hay un valor L que cumpla con la definición de límite.

Si se analiza el entorno reducido de centro 2 y radio δ, los valores de la variable x que se encuentren en el semientorno de la derecha de 2, es decir, en el intervalo $(2, 2+\delta)$, determinan que la función pertenece al entorno de centro 2 y radio ε, mientras que si se consideran los valores de la variable x en el semientorno de la izquierda de 2, o sea, en el intervalo $(2-\delta, 2)$, la función se encuentra en el entorno de centro 1 y radio ε.

En símbolos:

Si $x \in (2, 2+\delta) \Rightarrow f(x) = 2, \in E(2, \varepsilon)$
Si $x \in (2-\delta, 2) \Rightarrow f(x) = 1, \in E(1, \varepsilon)$

Esto determina que no existe valor L que permita verificar la definición de límite, por lo que la conclusión es que no existe límite de la función en 2.

Para cualquier ε que se considere, de valor menor que 1, elegido como radio para L = 1 o para L = 2, no existe δ que permita el cumplimiento de la definición.

$\nexists\ \delta \,/\, \forall x : x \in Df \wedge \in E'(2,\delta) \Rightarrow f(x) \in E\,(2) \wedge f(x) \in E\,(1)$

En situaciones como la presente, aunque queda claro y definitivo que el límite en el punto no existe, interesa determinar, cual es el comportamiento de la función en cada uno de los semientornos a la derecha y a la izquierda del punto que analizamos.

Este concepto lleva a la definición de límites laterales:

Se dice que el límite por la derecha de la función f en el punto a de acumulación de su dominio será el valor L_1, sí y sólo si, para cualquier valor ε arbitrariamente pequeño y positivo, existe un valor δ también positivo (en general δ depende de ε), de manera que para todo valor x del dominio de la función perteneciente al semientorno derecho de centro "a" y radio δ, se verifica que la función pertenece al entorno de centro L_1 y radio ε. En símbolos:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$, con a PA de Df, sí y sólo si:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \,/\, \forall x: x \in Df \wedge x \in E'(der)\,(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E\,(L_1,\varepsilon)$
$(\delta = \delta(\varepsilon))$

El semientorno derecho, puede expresarse como intervalo o como módulo:

$E'(der)\,(a,\delta) = \{ x : a < x < a + \delta \}$
$E'(der)\,(a, \delta) = \{ x : |a - x| < \delta \wedge x > a \}$

En forma absolutamente análoga, se dice que el límite por la izquierda de la función f en el punto a de acumulación de su dominio será el valor L_2, sí y sólo si, para cualquier valor ε arbitrariamente pequeño y positivo, existe un valor δ también positivo (en general δ depende de ε), de manera que para todo valor x del dominio de la función perteneciente al semientorno izquierdo de centro "a" y radio δ, se verifica que la función pertenece al entorno de centro L_2 y radio ε. En símbolos:

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$, con a PA de Df, sí y sólo si:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \,/\, \forall x: x \in Df \wedge x \in E'(izq)\,(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in E\,(L_2,\varepsilon)$
$(\delta = \delta(\varepsilon))$

El semientorno izquierdo, indicado como intervalo o como módulo, sería:

$E'(izq)\,(a,\delta) = \{ x : a - \delta < x < a \}$

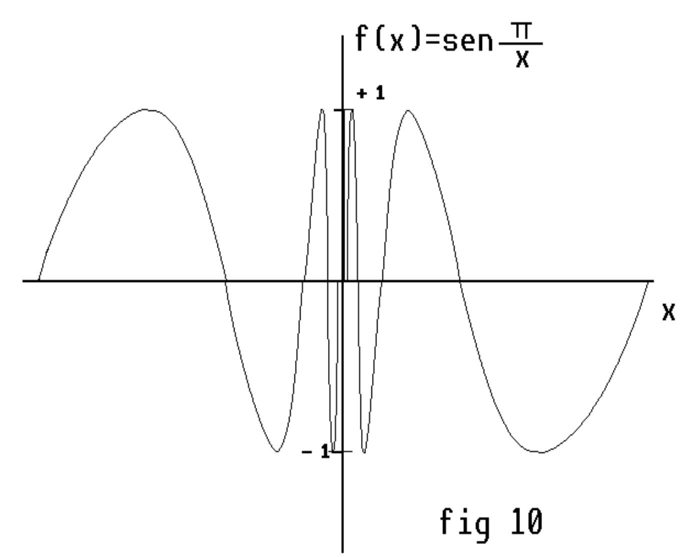
$E'(izq)\ (a,\delta) = \{ x : |x - a| < \delta \wedge x < a \}$

Las definiciones determinan inmediatamente que si para una función existen y son iguales sus dos límites laterales, $L_1 = L_2$, entonces existe, ∃, el límite L de la función en ese punto, de valor $L = L_1 = L_2$.

La implicancia recíproca no es válida, ya que la existencia de límite finito en un punto, no asegura la existencia de los laterales en el mismo, conforme las definiciones que han desarrollado.

Un ejemplo, lo constituye la función $+\sqrt{x}$, cuyo límite en x = 0, existe, al igual que el límite por derecha en ese punto, y no existe límite por izquierda (no existe función a la izquierda del cero).

No existencia del límite - Límites infinitos



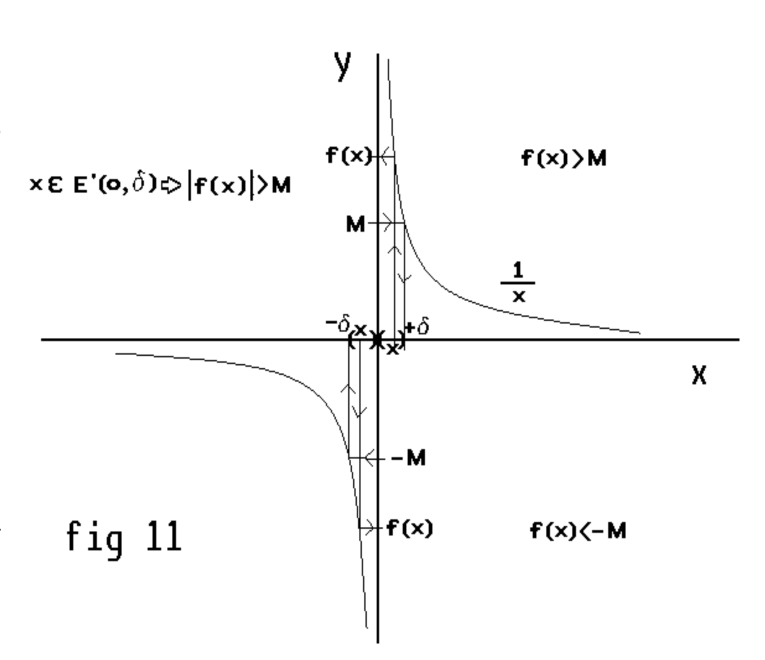
Hasta ahora se han determinado la existencia del límite finito de una función cuando el punto de acumulación es un número real, y el límite que se determina en el mismo es un número finito L.

También se expresó el concepto de no existencia de límite, con el concepto de límites laterales $L_1 \neq L_2$.

No existe límite tampoco, en casos como el de la función f (x) = sen $\frac{\pi}{x}$, en el punto a = 0 de acumulación de su dominio, ya que al tomar valores del dominio próximos a cero, la función oscila rápidamente entre + 1 y - 1, sin aproximarse a valor alguno. En este caso ni siquiera existen límites laterales. (fig 10)

Otro caso de no existencia de límite finito se presenta cuando se aproximan los valores del dominio al punto a de acumulación en que se busca determinar el límite y el valor de la función no se aproxima a valor finito alguno, sino que crece indefinidamente en valor absoluto.

Un clásico de este caso es f(x) = $\frac{1}{x}$ en el punto x = 0 que es PA de su dominio. (fig, 11)



La aproximación de la variable a cero, dentro del dominio, determina que se obtengan valores absolutos cada vez mayores para la función, en este ejemplo negativamente

grandes cuando $x < 0$ y positivamente grandes si $x > 0$.

Si se propone que la función supere en valor absoluto, un valor M por arbitrariamente grande que se elija, ello es posible a condición de que la variable se aproxime lo necesario al punto 0, o lo que es lo mismo, resulta que la variable pertenezca a un determinado entorno de centro en cero. En otras palabras, fijado el valor grande que se proponga para la función, se obtendrá el valor del radio del entorno para que ello se verifique.

En esas condiciones se dice que f (x) en cero tiene límite infinito, y es necesario señalar que no existe el límite finito en las condiciones en que se ha sido definido para el punto x = 0.

Se define límite infinito, en forma similar a la del límite finito, ya dada. Debe tenerse en cuenta que la expresión "entorno de infinito" que se utiliza en la misma no debe llevar a pensar en un centro y un radio como en los entornos de centro en un número real finito.

Ese concepto (que no todos los autores utilizan) expresa la idea de valor absoluto tan grande como se quiera.

Se dice, entonces, que el límite de una función f en el punto a de acumulación de su dominio es infinito, o, que la función f tiene límite infinito en el punto a de acumulación de su dominio, sí y sólo si, para cualquier valor M, arbitrariamente grande y positivo, existe un valor δ también positivo (en general δ depende de M), de manera que para todo valor x del dominio de la función perteneciente al entorno reducido de centro "a" y radio δ, se verifica que la función pertenece a un entorno infinito, de valor absoluto mayor que M. En símbolos:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, con a PA de Df, sí y sólo si:

$\forall\, M > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, \forall x: x \in Df \wedge x \in E'(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(\infty)$

$(\delta = \delta(M))$ $\qquad (|f(x)| > M)$

La interpretación gráfica de este concepto se aprecia en la misma figura 11 de la función $\frac{1}{x}$.

Se debe observar que la definición general expresada para los límites infinitos, no tiene en cuenta el signo del infinito resultante, lo que es suficiente cuando la característica del problema en estudio no requiera la distinción del signo entre $+\infty$ o $-\infty$.

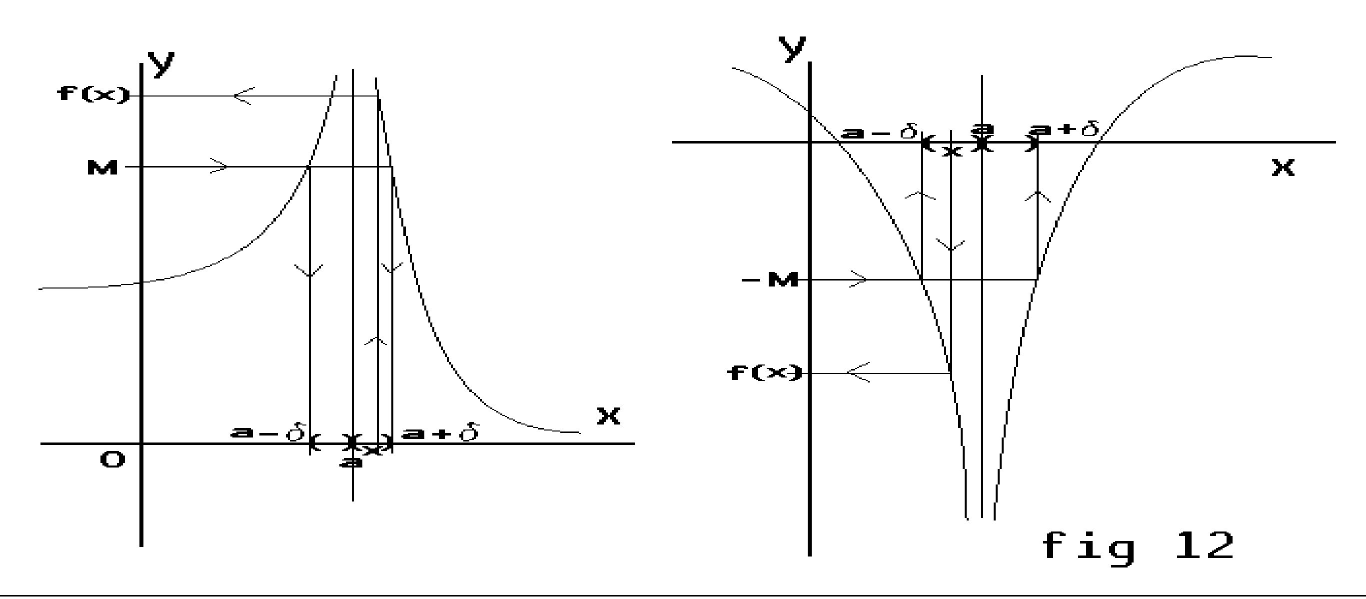
El ejemplo de la función $\frac{1}{x}$ muestra que la función toma valores positivos muy grandes para valores positivos de la variable, y negativos muy grandes para valores negativos, y que la misma cumple totalmente con la definición dada y permite afirmar que: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

La definición dada para límite infinito, no es suficiente si se necesita distinguir el signo del infinito, cuando la función crece positiva o negativa mente. En esos casos, quedan las definiciones de esta manera:

Para infinito positivo: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, con a PA de Df, sí y sólo si:

$\forall\, M > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, \forall\, x: x \in Df \wedge x \in E'(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(+\infty)$ (fig 12)

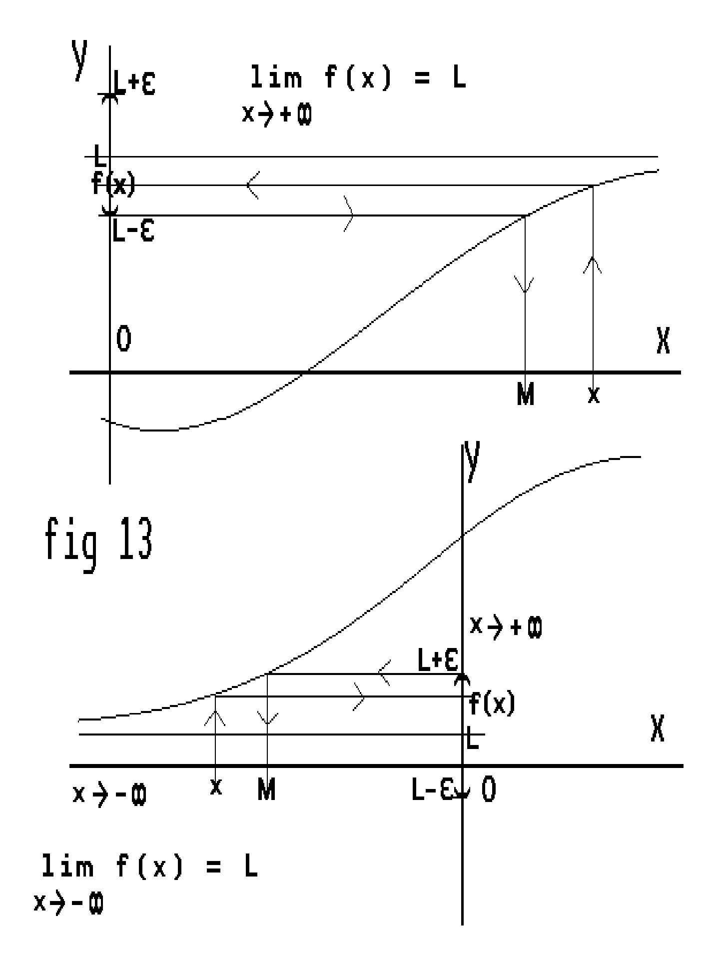
$(\delta = \delta(M))$ $\qquad (f(x) > M)$



Para infinito negativo: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, con a PA de Df, sí y sólo si:

∀ M > 0, ∃ δ > 0 / ∀ x: x ∈ Df ∧ x ∈ E' (a,δ) ⇒ f (x) ∈ E (- ∞) (fig 12)
(δ= δ(M)) (f(x) < - M)

Límites cuando la variable tiende a + o - ∞



Es importante analizar y definir, como extensión del concepto de límite, los casos en que la variable toma un valor infinitamente grande positivo o negativo.

En este caso no se considera el límite en un valor finito a, sino para valores infinitos, positivos o negativos de la variable x.

El requisito presente en la definición de límite finito, de punto de acumulación para el análisis del límite, queda cumplido si la función tiene dominio continuo en el entorno de + ∞, o, - ∞, según el caso.

Cabe recordar que la conclusión obtenida del concepto de punto de acumulación, es que no éste no sea aislado respecto del dominio, lo que queda asegurado con lo expresado en el párrafo anterior.

El resultado del límite cuando la variable tiende a infinito, puede ser a su vez, un valor finito L o un valor infinito, con lo se presentan dos casos a analizar y definir, según sigue:

a) Límite finito para variable infinita

El límite de la función f en un entorno infinito o cuando la variable tiende a infinito, será el valor L, sí y sólo si, para cualquier valor ε arbitrariamente pequeño y positivo, existe un valor N también positivo (en general N depende de ε), de manera que para todo valor x del dominio de la función perteneciente a un entorno infinito, se verifica que la función pertenece al entorno de centro L y radio ε. En símbolos:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, sí y sólo si:
$\forall$ M > 0, $\exists$ ε > 0 / $\forall$x: x $\in$ Df $\wedge$ $|x|$> M $\Rightarrow$ f(x) $\in$ E (L,ε)
(ε = ε (M))

Si, a su vez, se precisa determinar el signo del entorno de infinito que se considera para el límite, se tienen las dos posibilidades, cuando tiende a + ∞ y cuando tiende a - ∞:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, sí y sólo si:
$\forall$ M > 0, $\exists$ ε > 0 / $\forall$ x: x $\in$ Df $\wedge$ x > M $\Rightarrow$ f(x) $\in$ E (L, ε)
(ε = ε (M))

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, sí y sólo si:
$\forall$ M < 0, $\exists$ ε > 0 / $\forall$ x: x $\in$ Df $\wedge$ x < M $\Rightarrow$ f(x) $\in$ E (L,ε)
(ε = ε (M))

Se interpretan gráficamente estos límites en la figura 13

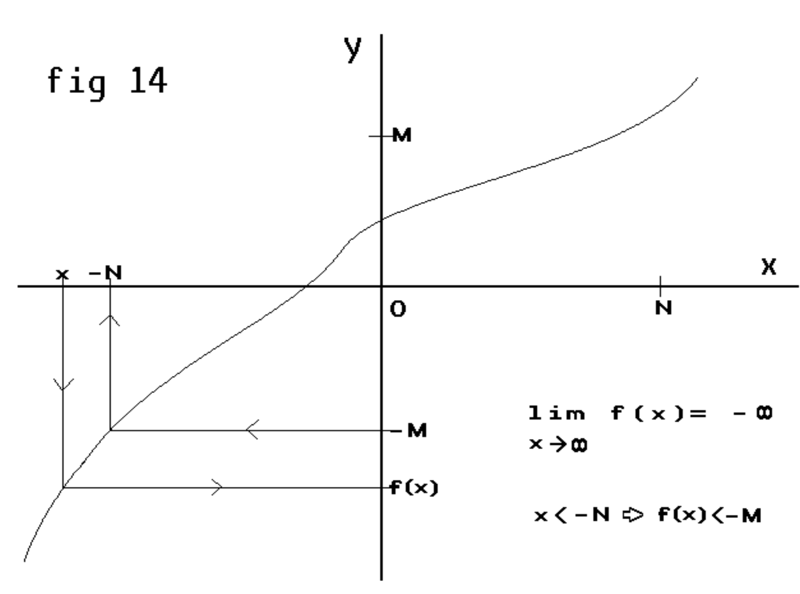
b) Límite infinito para variable infinita.

El límite de la función f en un entorno infinito o cuando la variable tiende a infinito, será infinito, sí y sólo si, para cualquier valor M arbitrariamente grande y positivo, existe un valor N también positivo (en general N depende de M), de manera que para todo valor x del dominio de la función que tiende a infinito, o perteneciente a un entorno infinito, se verifica que la función pertenece a un entorno infinito de valor absoluto mayor que M. En símbolos:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, sí y sólo si:
$\forall$ M > 0, $\exists$ N > 0 / $\forall$ x: x $\in$ Df $\wedge$ x $\in$ E (∞) $\Rightarrow$ f(x) $\in$ E (∞)
(N = N(M)) ($|x|$>N) ($|f(x)|$>M)

Como en casos anteriores, esta definición para límites infinitos obtenidos cuando la variable tiende a infinito admite (y necesita) la determinación de los signos en cada caso de los respectivos entornos infinitos positivos o negativos de la función y también infinitos positivos o negativos de la variable, lo que determina cuatro alternativas a distinguir:

i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, si y solo si:	$\forall$ M > 0, $\exists$ N > 0 / $\forall$x: x $\in$ Df $\wedge$ x > N $\Rightarrow$ f(x) > M
ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, si y solo si:	$\forall$ M > 0, $\exists$ N > 0 / $\forall$x: x $\in$ Df $\wedge$ x < - N $\Rightarrow$ f(x) > M
iii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, si y solo si:	$\forall$ M > 0, $\exists$ N > 0 / $\forall$x: x $\in$ Df $\wedge$ x > N $\Rightarrow$ f(x) < - M
iv) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, si y solo si:	$\forall$ M > 0, $\exists$ N > 0 / $\forall$x: x $\in$ Df $\wedge$ x < - N $\Rightarrow$ f(x) < - M



Como ejemplo, se interpreta la última de esas definiciones en la fig. 14.

La verificación de los límites infinitos y/o con variable tendiendo a infinito tiene total similitud con lo aplicado para límite finito.

Se parte de fijar el entorno para la función f, y se compara con el correspondiente de la variable.

A título de simple ejemplo: Verificar que: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

Se parte de la condición para la función: (1) $\left| \frac{1}{x} \right| > M$, lo que equivale a:

(2) $\frac{1}{x} > M$ si $\frac{1}{x} > 0$, y (3) $\frac{1}{x} < -M$ si $\frac{1}{x} < 0$

Para llegar a compararlo con: 0 - δ < x < 0 + δ (4)

Invirtiendo las expresiones (2) y (3), quedan como:

(5) $x < \frac{1}{M}$ si $x > 0$, y (6) $x > -\frac{1}{M}$ si $x < 0$

Comparando por un lado la expresión (5) con los dos últimos miembros de la desigualdad (4), y por otro lado la expresión (6) con los dos primeros miembros de la misma desigualdad (4), se llega, respectivamente a: $\delta = \frac{1}{M}$ y $-\delta = -\frac{1}{M}$, expresiones que son equivalentes, por lo que se verifica la primera parte de la definición de límite infinito, al determinarse que existe un δ >0, para cada M >0, y cuanto mayor es M resulta menor δ

El camino recíproco, para la verificación de la segunda parte de la definición, es inmediato:

A partir de la condición para x de la desigualdad (4), con la equivalencia ya dada: $\delta = \frac{1}{M}$, se llegan a obtener las expresiones (5) y (6).

De ellas, inmediatamente se obtienen (2) y (3) y de éstas queda su forma equivalente (1), que asegura el cumplimiento de la segunda parte de la definición.

Límites ∞/∞

La aplicación del cálculo de límites en que intervienen límites infinitos o con variable infinita se resuelve con idéntica metodología con que se han desarrollado los límites finitos.

Es así que pueden presentarse análogos casos de indeterminación a los vistos del tipo $\frac{0}{0}$ en los cocientes $\frac{\infty}{\infty}$, que se deben resolver mediante simplificaciones adecuadas análogas a las ya vistas.

En términos generales, es aplicable como criterio a utilizar, la extracción como factor común en numerador y denominador, de la mayor expresión que se encuentre en los mismos, y la simplificación de la misma, normalmente determina el cese de la indeterminación.

Sea como ejemplo: $\lim_{x \to +\infty} \frac{3^x + 5^x}{3^x - 5^x} = \frac{\infty}{\infty}$, por lo que debe salvarse la indeterminación

Conforme el criterio dado, se factorea numerador y denominador por la mayor expresión, que es 5^x, y luego se simplifica. Así, el pasaje el límite de la expresión simplificada no presenta ya la indeterminación.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3^x + 5^x}{3^x - 5^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5^x \left[\left(\frac{3}{5}\right)^x + 1\right]}{5^x \left[\left(\frac{3}{5}\right)^x - 1\right]} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x + 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^x - 1} = \frac{+1}{-1} = -1$$

En el cálculo de límites deben tenerse en cuenta muy especialmente las situaciones en que se deben analizar los límites laterales, ante la posibilidad de que sean distintos y ello determine que no existe el límite en el punto dado.

En términos generales se impone analizar límites laterales cuando aparece alguna división por cero o cuando se trata del estudio de un límite donde cambia la ley de definición de la función.

A fin de ilustrar lo dicho, se resuelve este ejemplo: $\lim_{x \to 0} \frac{2^{\left(1/x\right)} + 3^{\left(1/x\right)}}{2^{\left(1/x\right)} - 3^{\left(1/x\right)}}$

Hay que distinguir si x tiende a 0 siendo > 0 o < 0, ya que según así fuera, la función exponencial tendría exponentes que crecen positiva o negativamente, y su límite sería más o menos infinito, resultando entonces valores distintos. Para ello, se analizan ambos laterales:

Por derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2^{\left(1/x\right)} + 3^{\left(1/x\right)}}{2^{\left(1/x\right)} - 3^{\left(1/x\right)}} = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{2^z + 3^z}{2^z - 3^z} = -1$

Con el cambio de variable z = 1/x quedó un límite similar al resuelto en un ejemplo anterior:

Por izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2^{\left(1/x\right)} + 3^{\left(1/x\right)}}{2^{\left(1/x\right)} - 3^{\left(1/x\right)}} = \dfrac{0}{0}$ y sacando factor común $2^{\left(1/x\right)}$ y simplificando

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2^{\left(1/x\right)} + 3^{\left(1/x\right)}}{2^{\left(1/x\right)} - 3^{\left(1/x\right)}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2^{\left(1/x\right)}\left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{\left(1/x\right)}\right]}{2^{\left(1/x\right)}\left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\left(1/x\right)}\right]} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{\left(1/x\right)}}{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\left(1/x\right)}} = \frac{1}{1} = 1$$

La conclusión es que no existe: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\left(1/x\right)} + 3^{\left(1/x\right)}}{2^{\left(1/x\right)} - 3^{\left(1/x\right)}} = \nexists$ ya que tiene sus laterales distintos

La otra situación que impone el análisis de límites laterales es cuando cambia la ley de la función en el punto.

Por ejemplo para la función "signo de x", debe analizarse $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}[x]$ Dado que la definición de esta función es:

$$\operatorname{sgn}[x] = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

lo que se obtiene, para cada lateral, es

$\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}[x] = +1$, y $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}[x] = -1$ por lo que: $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}[x] = \nexists$

Infinitésimos e infinitos

Se dice que una función f es infinitésimo en el punto a, de acumulación de su dominio Df, si y solo si su límite en a es cero:

La función f (x), es infinitésimo en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

De esta definición sencilla, es claro que no existen "funciones infinitésimas", que como expresión genérica carece de sentido totalmente. Las funciones podrán ser infinitésimas en alguno o varios o infinitos puntos de acumulación de su dominio, o no serlo en ninguno.

Asimismo, se dice que una función f es un infinito en el punto a de acumulación de su dominio Df, si y solo si su límite en a es infinito de cualquier signo:

La función f (x), es infinita en a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \text{ o } -\infty$

Comparación de infinitésimos - Indeterminación del límite

Cuando se está en presencia de un cociente de funciones para las cuales se verifica que son infinitésimas para un mismo punto, el límite de ese cociente en ese punto resulta indeterminado, al ser cociente cero sobre cero, y resulta necesario, como se vio, lograr la simplificación que permita expresar finalmente el resultado.

Con f y g funciones infinitésimas en a, se verifica en primera instancia: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

Según el resultado que finalmente se obtenga para ese límite, con los mecanismos algebraicos necesarios para salvar la indeterminación, el resultado no podrá ser otro que un infinito o un número real k, mientras que en particular el número real k podrá ser 0, 1, u otro cualquiera.

Precisamente el resultado del límite del cociente de dos funciones infinitésimas en un mismo punto, determina el concepto de comparación de infinitésimos y el de orden de los infinitésimos, según se resume:

Si f (x), g (x) infinitésimos en a, y

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \to \text{f es infinitésimo de mayor orden que g} \\ \infty \to \text{f es infinitésimo de menor orden que g} \\ k \to \text{f y g son infinitésimos de igual orden} \\ 1 \to \text{f y g son infinitésimos equivalentes} \end{cases}$$

La característica más importante de este concepto es el de infinitésimos equivalentes, ya que los mismos precisamente permiten su reemplazo y constituyen otra posible metodología para la resolución de límites indeterminados de tipo $\frac{0}{0}$

Un ejemplo sencillo es el de αx y sen αx que son infinitésimos equivalentes en 0. La nomenclatura corriente para los infinitésimos equivalentes, usa el símbolo "~", "similar".

La "tabla" de infinitésimos equivalentes se elabora a partir de su definición, simplemente verificando que el límite del cociente de ambas funciones en el punto en que ambas son infinitésimos, sea la unidad, 1. Los más corrientes son:

sen α(x) ~ α(x)
tg α(x) ~ α(x)
1 - cos α(x) ~ $\frac{[\alpha(x)]^2}{2}$
arc sen α(x) ~ α(x)
arc tg α(x) ~ α(x)

$\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$

$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x).\ln a$ (con a > 1)

$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ (caso particular a = e)

$[1+\alpha(x)]^{p} - 1 \sim p.\alpha(x)$

$\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$ (caso particular p = 1/n)

Como ejemplo de aplicación en el uso de la tabla de infinitésimos equivalentes, calcular:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\ln(1+5x).\text{tg}\,\frac{3}{4}x} = \text{por tabla} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{[2x]^2}{2}}{(5x).\left(\frac{3}{4}x\right)} = \frac{2x^2}{\left(\frac{15}{4}\right)x^2} = \frac{8}{15}$$

Otras indeterminaciones del límite

Las indeterminaciones que se presentan en el cálculo de límites son siete, a saber:

1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ con ambas funciones infinitésimos en a: tipo "$\frac{0}{0}$".

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ con ambas funciones infinitos en a: tipo "$\frac{\infty}{\infty}$".

3) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ con las funciones infinitos de ≠ signo en a: tipo "∞ - ∞"

4) $\lim\limits_{x\to a} [f(x).g(x)]$ siendo una función infinitésimo y otra un infinito en a: tipo "0.∞"

5), 6), 7) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$

5) con ambas funciones infinitésimos en a: tipo "0^0"

6) si lím f es 1, y g es función infinito en a: tipo "1^∞"

7) f función infinito y g infinitésima en a: tipo "∞^0"

La resolución de límites indeterminados debe llevarse en general a la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, para proceder luego a la resolución en la forma usual en esos tipos.

El caso 3), suma de infinitos de distinto signo, puede resolverse, si no surge simplificación más directa, con la expresión (siempre posible) : $f + g = \dfrac{\frac{1}{g}+\frac{1}{f}}{\left(\frac{1}{g}\right).\left(\frac{1}{f}\right)}$ con la que se transforma la suma de infinitos de distinto signo en una indeterminación tipo $\frac{0}{0}$ y se resuelve a partir de ella.

En cuanto al caso 4), producto de un infinitésimo y un infinito, se transforma fácilmente con alguna de las dos expresiones siguientes, de las cuales elegiremos la que algebraicamente nos resulte mejor: $f\,.\,g = \dfrac{f}{1/g} = \dfrac{g}{1/f}$ que evidentemente pasan a ser indeterminaciones de las formas $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$

Finalmente, los tres últimos tipos de indeterminación, de forma exponencial, requieren la aplicación de logaritmos, que indicamos con nomenclatura simplificada: si se busca $L = \lim \left[f\right]^{g}$, aplicando ln en ambos miembros será expresable como: $\ln L = \lim \left[g.\ \ln|f|\right]$

La expresión del último miembro anterior, en cualquiera de los tres casos, será siempre una indeterminación de tipo "$0.\infty$", que en un segundo paso, se lleva a $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, para su resolución en la forma usual.

Debe tenerse en cuenta con el resultado que se arribe, que será, por ejemplo: ln L = K, con lo que no debe olvidarse que el límite buscado originalmente será entonces, $L = e^{K}$.

El número e

Un caso particular, importante, dentro de las indeterminaciones, es el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ cuyo resultado, es el número e y que más adelante justificaremos con su demostración

Con este límite, se resuelven muchos ejercicios derivados de su expresión, por lo que aceptaremos, entonces por ahora, que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Asíntotas lineales

El concepto de asíntota, en general, el de una curva respecto de la cual la gráfica de la función se aproxima indefinidamente sin alcanzarla.

El concepto comprende como asíntotas a todo tipo de curvas, siendo las más sencillas, desde ya, las lineales y nos referiremos aquí solamente a ellas, pero teniendo en cuenta que constituyen solamente una parte del tema.

Nuestra definición de asíntotas lineales a curvas planas utiliza el concepto de límite, y distinguiremos las asíntotas entre verticales, horizontales y oblicuas.

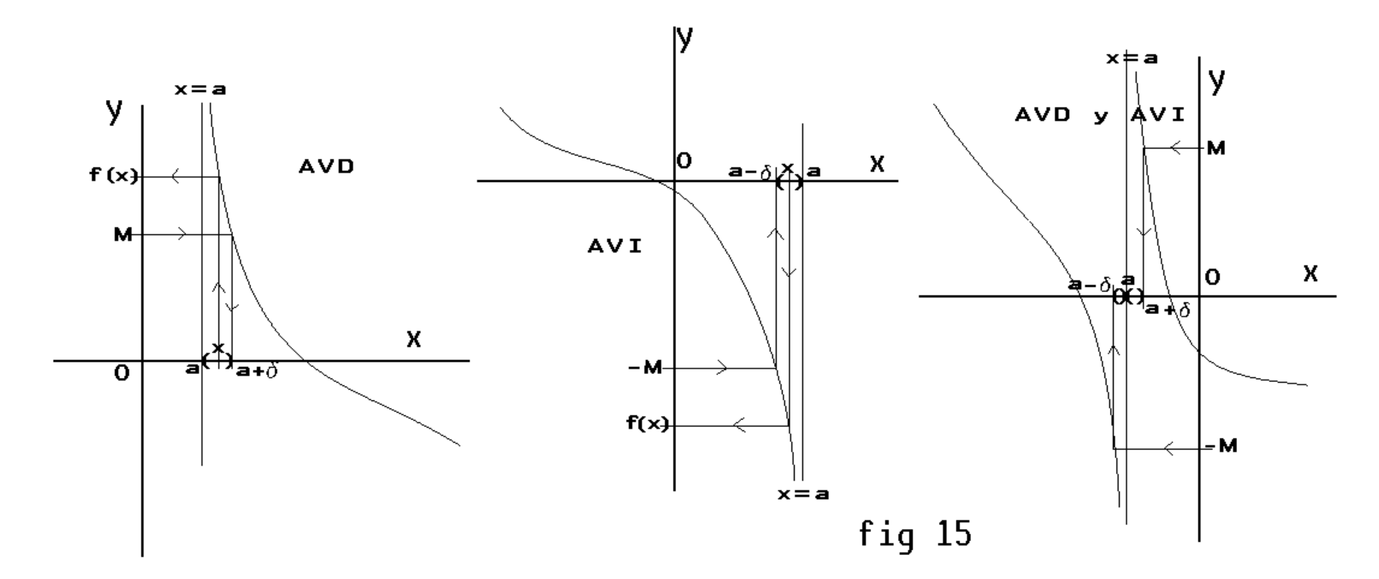


fig 15

En horizontales y oblicuas, las distinguiremos cuando corresponda, sean por derecha o por izquierda

a) Asíntotas verticales derecha e izquierda: AVD y AVI

La recta de ecuación x = a, es AVD del gráfico de la función f, si y solo si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$.

En símbolos: la recta x = a es AVD de f $\Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$

La recta de ecuación x = a, es AVI del gráfico de la función f, si y solo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$.

En símbolos: la recta x = a es AVI de f $\Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$

Es de señalar que no se requiere determinado signo de infinito para el límite, para cumplir la condición de asíntota. También se destaca que una recta puede ser AVD, AVI o ambas simultáneamente. (figura 15).

b) Asíntotas horizontales derecha e izquierda: AHD y AHI

La recta de ecuación y = b, es AHD del gráfico de la función f, si y solo si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

En símbolos: la recta y = b es AHD de f $\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ (fig 16)

La recta de ecuación y = b, es AHI del gráfico de la función f, si y solo si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

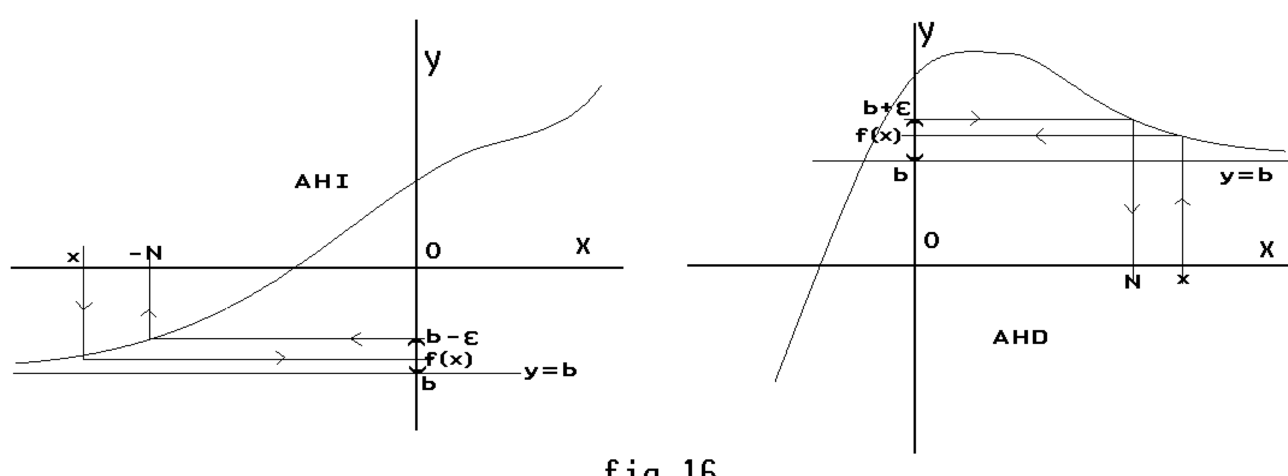


fig 16

En símbolos: la recta y = b es AHI de f $\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

c) Asíntotas oblicuas derecha e izquierda: AOD y AOI

La recta de ecuación y = m x + n (m ≠ 0), es AOD del gráfico de la función f, si y solo si:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (m\,x + n)] = 0,$$

En símbolos: y = mx + n es AOD de f $\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (m\,x + n)] = 0$

La recta de ecuación y = m x + n (m ≠ 0) , es AOI del gráfico de la función f, si y solo si:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (m\,x + n)] = 0,$$

En símbolos: y = mx + n es AOI de f $\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (m\,x + n)] = 0$

Determinación de "m" y de "n" para las asíntotas oblicuas

Demostraremos el valor que se obtiene para m y n para la AOD. Lo hacemos, con x → + ∞, y es idéntico para la AOI, con x → - ∞. De la definición para esa asíntota teníamos que:

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (m\,x + n)] = 0;$ por propiedad de límites:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (m\,x + n);$ (*) dividiendo por x ≠ 0:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{m\,x + n}{x}\right) = m$ o sea que queda: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

de la expresión (*), por propiedad de límites, es: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (m\,x) + n$

con lo que, despejando n, y aplicando nuevamente propiedad de límites, queda:

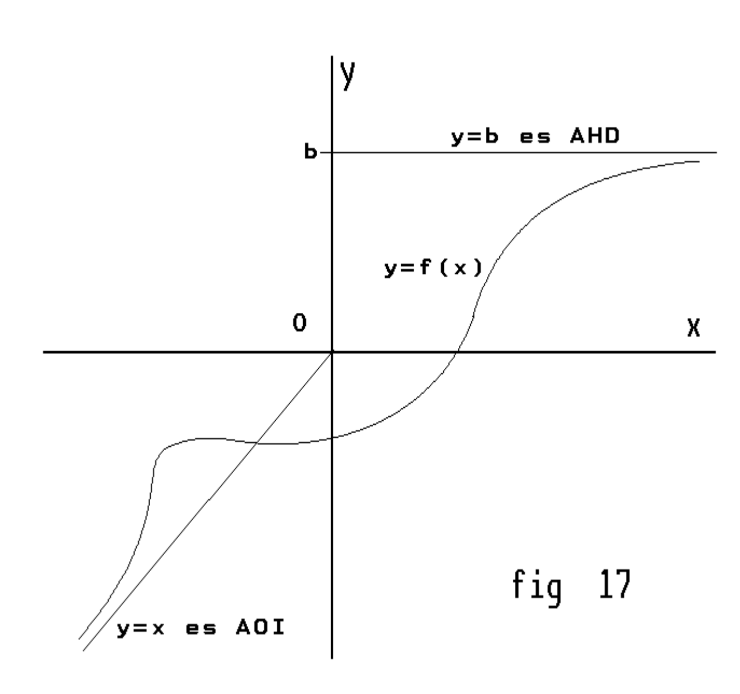
$\boxed{n = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - m\,x\right]}$ y ya encontramos previamente: $\boxed{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}}$

El resumen de las definiciones y conceptos sobre asíntotas lineales, nos permite llegar a las siguientes conclusiones:

Respecto de las asíntotas verticales, una función puede no tener ninguna (ejemplo: $y = e^x$), una sola (ejemplo: $y = \frac{1}{x}$), un número finito (ejemplo: $y = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$), o también infinitas (ejemplo: y = tg x).

Respecto de las horizontales y también de las oblicuas, una función puede no tener ninguna asíntota (ejemplo: y = sen x), tener una sola de ellas, izquierda o derecha, (ejemplo: $y = 2^x$), o ambas, izquierda y derecha (como ejemplo: $y = \frac{1}{x^2}$).

Puede también, tener oblicua por izquierda y horizontal por derecha, y viceversa. (fig 17).



Lo que NO puede ocurrir, por la unicidad del límite, es que haya más de una asíntota por izquierda ni más de una asíntota por derecha, tanto sea horizontal u oblicua.

Por el concepto de función, tampoco pueden coexistir por el mismo lado asíntotas oblicuas y horizontales.

Respecto de la determinación de todas las asíntotas de la gráfica de una función, luego de la determinación de las verticales, pueden buscarse directamente las oblicuas, por izquierda y derecha de manera que si no se encuentra el valor de m (por no existir finito), no hay ni oblicuas ni horizontales, mientras que si de la determinación de m (pendiente) resulta valor cero, no hay oblicua, pero puede haber horizontal.

Ejemplo, determinar todas las asíntotas de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0 \\ x + \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$ resulta del análisis, conforme se ha definido que:

x = 0 es AVD y AVI, ya que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$, y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \infty$

y = 0 es AHI, ya que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

y = x es AOD, ya que $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, y $n = \lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - 1.x \,] = 0$

Se deja propuesto realizar la gráfica de la función analizada. Las asíntotas determinadas “ayudan” a una mejor representación.

Algunos límites especiales

A partir del límite que determina el número e $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Es posible determinar numerosos límites importantes, que son obtenidos como consecuencia simple de aquel:

a) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ = (haciendo z = - x) = $\lim_{z\to+\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z} = \lim_{z\to+\infty}\frac{(z-1)^{-z}}{(z)^{-z}} =$

$= \lim_{z\to+\infty}\frac{(z)^{z}}{(z-1)^{z}} =$ (y haciendo ahora: z - 1 = t) $\lim_{t\to+\infty}\frac{(1+t)^{(1+t)}}{(t)^{(1+t)}} =$

$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}.\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}.\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1} = e.1 = e$

$t\to+\infty$

Esto generaliza el importante límite de la expresión de la función $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ ya que hemos probado, y es ahora aplicable, que su límite para más o menos infinito es también el número e

: $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e}$

b) Ahora, para la misma función, con el signo menos: $g(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$, se llega a :

$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$ = (haciendo x = - z) = $\lim_{z\to-\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-z} = \lim_{z\to-\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}} = \frac{1}{e}$

se hace un procedimiento análogo para cuando $x\to-\infty$, con lo que generalizamos también:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} = \frac{1}{e}$$

y ahora se pueden demostrar dos límites particulares, que permiten determinar infinitésimos equivalentes, que se han incluido en la tabla respectiva:

<u>I) Sea calcular:</u> $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Para ello, se deben considerar límites laterales, analizando separadamente:

Por derecha $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$ = (haciendo $z = \dfrac{1}{x}$) =

$$\lim_{z\to +\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right] = \ln\left[\lim_{z\to +\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right] = \ln e = 1$$

Por izquierda $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$ = (haciendo $z = \dfrac{1}{x}$) =

$$= \lim_{z\to +\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right] = \ln\left[\lim_{z\to +\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right] = \ln e = 1$$

Al resultar iguales los límites laterales, existe el límite buscado y vale 1: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (*)

Y esto confirma que ln (1 + x) y x son <u>infinitésimos equivalentes</u> en 0: ln (1 + x) ~ x

Con z = α(x), de (*), se deduce fácilmente que: ln (1 + α(x)) ~ α(x), ya indicada en la tabla.

<u>II) Calcular:</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x}$ (1)

Aquí se recurre a la sustitución: $a^x - 1 = z$, con lo que, si $x \to 0$; $z \to 0$; $a^x = 1 + z \Rightarrow$

$\Rightarrow$ x ln a = ln (1 + x) $\Rightarrow$ $x = \dfrac{\ln(1+z)}{\ln a}$

y reemplazando en la expresión (1) del límite a calcular, resulta:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{z}{\ln(1+z)}.\ln a$, con z y ln (1+z) infinitésimos equivalentes en 0, por lo que

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x}$ = ln a , y lo que es lo mismo: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x.\ln a} = 1$

Probando entonces que $a^x - 1$, y x.ln a, son infinitésimos equivalentes en x = 0:

$a^x - 1 \sim x.\ln a$, y con α(x) = z llegamos a:
$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x).\ln a$, y también:
$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$

<u>**Función continua en un punto y en un intervalo**</u>

El concepto de continuidad que se presentará con el rigor de la definición, nos llevará a coincidir con el concepto intuitivo o del lenguaje corriente con que se puede expresar a partir del gráfico de una función.

Bajo esa forma natural, la idea de continuidad, sin tener conocimientos del análisis nos llevaría a ver lo relacionado con la gráfica de una función, según tuviéramos que "interrumpir" su trazado, levantando o no el lápiz del papel.

La formalidad de la definición lleva a coincidir con esa idea.

Definición de función continua en un punto

Sea una función f, de R en R, cuyo dominio sea Df, para la que se considera un punto a perteneciente a ese dominio, al que le corresponde f(a) como valor de la función en el mismo.

Se define entonces, diciendo que la función f es continua en el punto a perteneciente a su dominio, si y solo si, para cualquier valor ε arbitrariamente pequeño y positivo, existe un valor δ también positivo (en general δ depende de ε), de manera que para todo valor x del dominio de la función perteneciente al entorno de centro "a" y radio δ, se verifica que la función pertenece al entorno de centro f(a) y radio ε. En símbolos:

$$f(x) \text{ cont en a, con } a \in Df \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, \forall\, x : x \in Df \wedge x \in E(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in E(f(a), \varepsilon)$$
$$(\delta = \delta(\varepsilon))$$

Esta definición es rigurosa, y debe observarse que para el punto "a", en que se define la continuidad de la función no se le exige la condición de que sea de acumulación respecto del dominio, sino concretamente que pertenezca al mismo.

La definición formal expresada, permite expresar la continuidad en un punto aislado del dominio, ya que es emergente de la misma concluir que si "a" no es punto de acumulación respecto del dominio Df, la función es continua en a, por la única condición de que exista f(a) finito.

Lógicamente interesa en especial interpretar y analizar cuando a es también punto de acumulación respecto del dominio además de pertenecer a él.

En ese caso, que es lo más general, y precisamente lo que interesa desarrollar de aquí en más, de la comparación entre la definición de continuidad aquí dada, y la definición de límite finito presentada oportunamente, es inmediato concluir que:

$$\text{f es continua en a, } \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad (1) \quad \text{(a es PA de Df)}$$

Para el caso de que el punto a no sea de acumulación respecto de Df, lo que no será de aplicación en nuestro texto, (pero se completa como un concepto formal) es:

$$\text{(a no es PA de Df) f es continua en a, } \Leftrightarrow \exists\, f(a) \text{ finito}$$

Un ejemplo de aplicación de esta última sería para el conjunto de los números naturales

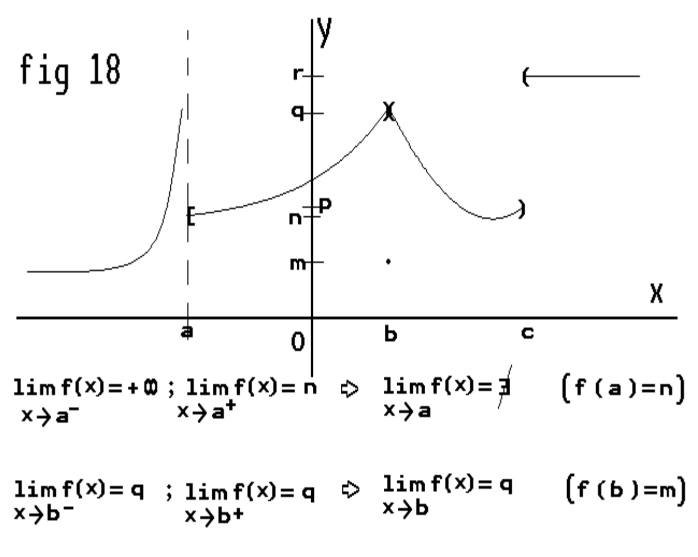
A partir de la definición rigurosa presentada, y reiterando que carece de interés en este texto considerar la continuidad de una función en un punto aislado del dominio, el concepto es utilizado fundamentalmente cuando a es punto de acumulación del dominio de la función.

Precisamente por lo dicho, muchos autores expresan el concepto de continuidad de una función en un punto, a partir de la expresión (1) anterior, es decir comparando directamente el límite de la función en el punto considerado con el valor de la función en el mismo.

Ello requiere, por supuesto, la existencia de los valores de la función en el punto (función definida en a), del límite en el mismo punto (existencia del límite finito en el punto), y que ambos sean iguales. Esto queda entonces, simplemente expresado como:

f: función de R en R ; a: P.A. del Df

$$\text{(2) f es continua en a} \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \text{, con L finito} \\ 2)\ \exists f(a) \\ 3)\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = n$ ⇨ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \nexists$ $(f(a) = n)$

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = q$; $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = q$ ⇨ $\lim\limits_{x\to b} f(x) = q$ $(f(b) = m)$

$\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = p$; $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = r$ ⇨ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \nexists$ $(f(c) = \nexists)$

Si f es continua en todos los puntos de un intervalo, es continua en el intervalo.

Si una función f, es continua para todo punto a / a ∈ Df, es continua en su dominio.

Si una función f, con dominio D f ≡ R, es continua para todo a /a ∈ R, se dice que la función f es continua en R.

La figura 18 ilustra algunos casos que pueden analizarse sobre la continuidad conforme las expresiones (2). La gráfica dibujada corresponde a una función con dominio R - { c }, observándose que en los puntos indicados "a", "b" y "c", la función no cumple las condiciones de continuidad.

En el punto a, no existe el límite en a, lo que ya es suficiente para asegurar que no es continua, aunque exista en este caso f(a).

En el punto b, existe el límite, que vale q, finito, y existe f(b), que vale m, pero como q ≠ m, no se verifica la igualdad, y por ello, tampoco existe el límite en b.

En el punto c, no existe el límite, y aunque existiera, no puede haber continuidad, porque no está definida f(c), ya que c ∉ Df.

Si no se cumple la condición de continuidad en un punto, se dice que la función es discontinua en el punto.

Tipos o clases de discontinuidades

A partir de la existencia de una discontinuidad en un punto, interesa clasificar la forma, (clase o tipo son también sinónimos) de la misma.

Este tema presenta varias formas de clasificación según los autores, optando aquí por la distinción de las mismas en discontinuidad evitable o discontinuidad esencial. (también se las puede clasificar como de primera clase o de segunda clase).

Se definen con la designación elegida de esta manera:

f es discontinua evitable en a, si y solo si:
f es discontinua en a, y $\exists \lim_{x \to a} f(x) = L$, finito

f es discontinua esencial en a, si y solo si:
f es discontinua en a, y $\nexists \lim_{x \to a} f(x) = L$, finito

De las definiciones dadas, se distingue que el elemento determinante para clasificar la discontinuidad existente en un punto, es el límite de la función en el punto: si existe finito es evitable, y si no existe finito es esencial.

En la figura 18, la discontinuidad en b es evitable, mientras que en a y en c es esencial.

Redefinición de la función en caso de discontinuidades evitables

Si se trata de una discontinuidad evitable, como en el punto b de la figura 18, se impone efectuar una redefinición de la función en el punto, para salvar la discontinuidad allí existente.

Ello se efectúa asignando a la función el valor del límite finito existente en el punto (precisamente la existencia de este límite es lo que caracteriza la discontinuidad evitable).

Esta redefinición, significa "corregir" la función, que en el ejemplo mencionado se realiza asignándole a f(b) el valor de q, en reemplazo de m.

Para la interpretación completa de lo dicho sobre el tema, se desarrollan algunos ejemplos, que en todos los casos requiere la determinación de las discontinuidades, su clasificación y redefinición cuando ello es posible.

Sean, para ambos ejemplos, analizar en R las discontinuidades de las funciones, y redefinir cuando corresponda.

Ejemplo a) $f(x) = \dfrac{(x+4)(5x-1)}{(x+4)(2x-6)(x+7)}$; Df = R - { -7, -4, 3 }

i) Se analiza la continuidad para un valor genérico a ≠ - 4, a ≠ 3, a ≠ - 7, es decir a ∈ Df aplicando la verificación de las tres condiciones requeridas:

1) $\exists \lim_{x \to a} f(x) = \dfrac{(a+4)(5a-1)}{(a+4)(2a-6)(a+7)}$, finito

2) $\exists\ f(a) = \dfrac{(a+4)(5a-1)}{(a+4)(2a-6)(a+7)}$, finito

3) de lo anterior, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, $\forall$ a ⇒ La función f(x) es continua para todo a de su dominio. Vemos entonces los puntos que no pertenecen a D f

ii) Para el punto x = -7

1) $\lim_{x \to -7} f(x) = \infty$, no existe límite finito,

lo que ya determina que en x = - 7 es discontinua esencial

iii) Para el punto x = - 4

1) $\lim_{x \to -4} f(x) = \frac{1}{2}$, $\exists$ y es finito

2) no $\exists$ f (-4)

por lo que en x = - 4 y al existir el límite, finito, es discontinua evitable

iv) Para el punto x = 3

1) $\lim_{x \to 3} f(x) = \infty$, no existe límite finito

por lo que se concluye que en x = 3 es discontinua esencial

Redefinición: Es posible efectuarla únicamente para x = - 4, donde la discontinuidad es evitable, por lo que queda la nueva función redefinida (se indica $f^*(x)$) de esta manera:

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+4)(5x-1)}{(x+4)(2x-6)(x+7)} & \text{si } x \neq -4 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = -4 \end{cases}$$

ahora con $D f^* = R - \{ -7, 3 \}$

Ejemplo b)

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{12}{x+5} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Dg = R - { 1 }

El estudio en R , debe realizarse como en el ejemplo a), verificando que g es continua en un punto genérico "a" < 1 y con otro genérico "b" > 1, en forma absolutamente similar al anterior. Esto lo dejamos como práctica, vemos solamente donde no hay dominio.

Aquí se debe analizar en especial el punto x = 1, por un lado, ya que no pertenece al dominio de g, pero fundamentalmente por ser el valor en que cambia la ley de expresión de la función. Esta última condición requiere siempre la determinación de límites laterales.

1) $\lim_{x \to 1^+} g(x) = 2$; $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 2$; $\Rightarrow \exists \lim_{x \to 1} g(x) = 2$, finito

2) NO$\exists$ g (2) , por lo que g es discontinua en x = 1 .

La existencia de límite finito determina que en x = 1 hay una discontinuidad evitable, por lo que se impone una redefinición, que así resulta :

$$g^*(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{12}{x+5} & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \text{ahora es } Dg^* = R$$

Continuidad lateral

Si se necesita analizar o considerar continuidad de una función en un intervalo cerrado [a,b], es necesario definir el concepto de continuidad lateral, que resulta inmediato, a partir del concepto de límites laterales.

f(x) es continua por derecha en el punto a si y solo si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

f(x) es continua por izquierda en el punto b si y solo si $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Esto permite definir continuidad de una función en un intervalo cerrado.

f es continua en [a,b], si y solo si:

i) f es continua $\forall$ x / x $\in$ (a,b) (intervalo abierto)
ii) f es continua por derecha en a
iii) f es continua por izquierda en b

Álgebra de las funciones continuas

A partir de las álgebras de funciones y de los límites, resulta inmediato demostrar que:

Si f y g son funciones con dominios Df y Dg, y si a es un punto perteneciente a los mismos, o sea a $\in$ Df y a $\in$ Dg, donde se verifica la continuidad de ambas funciones, entonces se cumple para las operaciones con funciones:

1) la función suma f + g es continua en a
2) la función resta f - g es continua en a
3) la función producto f . g es continua en a
4) la función cociente f / g es continua en a , con g(a) $\neq$ 0

Como ejemplo, demostramos la primera afirmación, para la continuidad de la suma (f + g).

Por propiedad del álgebra de límites: $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$ = por ser f y g

funciones continuas en a = f(a) + g(a) = por álgebra de funciones = (f + g)(a)

Con lo que, entre el primero y último miembro de las igualdades, queda:

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = (f + g)(a),$$ lo que demuestra la continuidad de la función suma en a.

Si cada una de las funciones intervinientes en las cuatro operaciones elementales es continua en su dominio, las funciones suma, resta, producto y cociente serán continuas en la intersección de los respectivos dominios. En el caso del cociente, lógicamente no será continua en donde se anule la respectiva función divisor.

<u>Continuidad de la función compuesta</u>

Completa al tema del álgebra de las funciones continuas, el análisis de la continuidad de la composición de dos funciones, que presenta particularidades propias de esta operación entre funciones, que requiere su análisis cuidadoso.

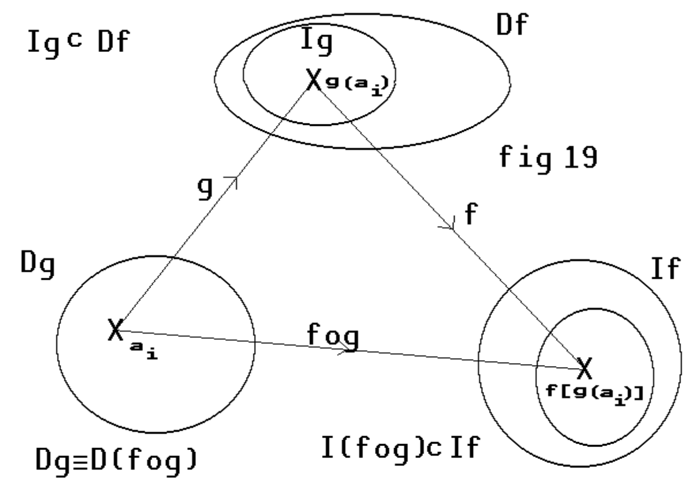
Sean, las funciones f y g para las que la relación de composición es f o g = f [g (x)], y supongamos que a pertenece al dominio de la función compuesta.

Si se cumplen las condiciones siguientes:

i) g es continua en a, y ii) f es continua en g (a), entonces f o g es continua en a. (*)

Análogamente, planteamos la relación de composición en orden inverso g o f = g [f (x)], con a perteneciente al dominio de esta nueva composición. Si se verifica que:

i) f es continua en a, y ii) g es continua en f (a), entonces, g o f es continua en a. (*)



La demostración es simple, y de razonamiento sencillo con el concepto de la operación de composición entre funciones.

Las afirmaciones (*) requieren que la primera función que se aplica sea continua en el punto considerado, mientras que la segunda función a aplicar, debe serlo en la imagen del punto correspondiente a la primera función.

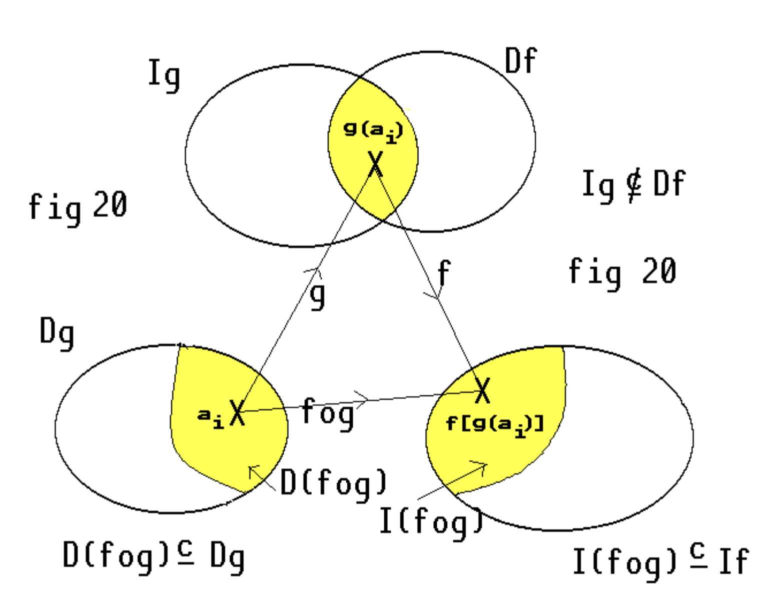
Debe tenerse en cuenta el carácter unidireccional de la condición expresada. Existen funciones compuestas que resultan continuas, sin que necesariamente sean continuas las funciones componentes.

A la luz de las condiciones expresadas, se puede expresar como <u>teorema</u> el siguiente:

Sean las funciones f y g, continuas en sus respectivos dominios Df y Dg . Entonces se cumple que las funciones compuestas entre ellas, sean f o g, ó g o f, serán continuas en sus respectivos dominios:

$$\text{f continua en Df} \wedge \text{g continua en Dg} \Rightarrow \begin{cases} \text{(f o g) continua en D (fog)} \\ \wedge \\ \text{(g o f) continua en D (gof)} \end{cases}$$

La afirmación se cumple con independencia del hecho en que haya que restringir el dominio de la primera función o que la composición sea directa. (figuras 19 y 20)



Demostramos aquí la continuidad de la composición (f o g), en su dominio.

Se debe probar que (f o g) será continua $\forall x \,/\, x \in D(fog)$.

(Análoga demostración se puede hacer para (g o f)).

En cualquiera de las condiciones en que se presente la composición respecto de la relación entre imagen de la primera función y dominio de la segunda, que se verifique:

$$Ig \subseteq Df \text{ o } Ig \not\subset Df ,$$

siempre será válido, como se dijo en composición de funciones, que: $D(fog) \subseteq Dg$

Consideramos un a_i genérico tal que $a_i \in D(fog)$, ya que por la relación anterior, nos asegura que $a_i \in Dg$.

Por ello, $\forall a_i \in D(fog)$ se cumplen las condiciones dadas en las afirmaciones (*) para asegurar la continuidad de la función compuesta, en este caso (f o g), ya que vemos que $\forall a_i \in D(fog)$:

i) g es continua en a_i, ya que $a_i \in D(fog)$, por lo que $a_i \in Dg$, y g es continua en todo Dg, por hipótesis.

ii) f es continua en $g(a_i)$, ya que $g(a_i) \in Ig$ o $g(a_i) \in I^*g$ (según haya o no restricción),

y como $Ig \subseteq Df$ o $I^*g \subseteq Df$ respectivamente, será $g(a_i) \in Df$ y f es continua en todo Df, por hipótesis.

En resumen, se cumplen, las condiciones de continuidad en un punto, para todo a_i, que pertenezca a (fog), lo que demuestra la continuidad de toda función compuesta a partir de la continuidad en sus dominios de las funciones componentes.

Esta demostración, simplifica el análisis de la continuidad de funciones compuestas, en particular, si las funciones componentes son continuas en sus respectivos dominios.

Con carácter general, la metodología de análisis de la continuidad de (f o g) y de (g o f), se efectuará en sus respectivos dominios, y se extenderá cuando las circunstancias del problema lo requiera, a los puntos de acumulación respecto de los D(fog) o D(gof), si ellos existiesen.

Las posibilidades que se presentan depende de la continuidad de cada una de las funciones componentes, y, para el caso de la composición (f o g), podemos distinguir todas las situaciones posibles, a saber:

i) f continua en Df $\wedge$ g continua en Dg (es el caso demostrado en el teorema) $\Rightarrow$ (f o g) continua en D (fog).

ii) f continua en Df $\wedge$ g continua en Dg - $\{a_i\}$ $\Rightarrow$ (f o g) continua en D (fog), excepto en los a_i / $a_i \in$ D (fog), donde se deberá analizar la continuidad por definición de continuidad en un punto.

iii) f continua en Df - $\{b_i\}$ $\wedge$ g continua en Dg $\Rightarrow$ (f o g) continua en D (fog), excepto en los c_i : $c_i \in$ D (fog) tales que $g(c_i) = b_i$, donde se deberá analizar la continuidad por definición de continuidad en un punto.

iv) f continua en Df - $\{b_i\}$ $\wedge$ g continua en Dg - $\{a_i\}$ $\Rightarrow$ (f o g) continua en D (fog), excepto en los a_i : $a_i \in$ D (fog), y en los c_i : $c_i \in$ D (fog) tales que g $(c_i) = b_i$, donde se deberá analizar la continuidad por definición de continuidad en cada punto que ocurra.

Algunos ejemplos de análisis de la continuidad en funciones compuestas

1) Analizar continuidad de f o g, siendo $f = e^x$; $g = 3x + 1$

Como f es continua en Df y g es continua en Dg, simplemente f o g será continua en su respectivo dominio.

Df = R ; If = R^+ $\quad\Big\}$ $\Rightarrow$ Ig $\subseteq$ Df $\Rightarrow$ D(fog) $\equiv$ R

Dg = R ; Ig = R $\quad$ $\Rightarrow$ (f o g) continua en R

$$(f \circ g) = e^{3x+1}$$

2) Analizar la continuidad de f o g, siendo f = ln x , $g = \dfrac{1}{x}$

También f y g son continuas en Df y Dg respectivamente, por lo que el tema se reduce a determinar D (fog).

Df = R^+ ; If = R $\quad\Big\}$ $\Rightarrow$ Ig $\not\subset$ Df $\Rightarrow$ busco $I^*g \subseteq$ Df

$\Rightarrow I^*g = R^+ \Rightarrow D^*g = R^+$ y como

Dg = R - { 0 } ; Ig = R - { 0 } $\quad$ D(fog) $\equiv D^*g \Rightarrow$ (fog) continua en R^+

$$(f \circ g) = \left(\ln \frac{1}{x}\right)$$

3) Analizar las continuidades de las composiciones f o g, y de g o f, siendo f = 3 x + 6, g = sgn (x).

f es continua en Df ; g es continua en Dg - { 0 }

Df = R ; If = R ; Dg = R ; Ig = { -1, 0, +1 }

a) f o g , será continua en D(fog), salvo en donde g no es continua, lo que ocurre en x = 0, donde debe analizarse por definición.

como Ig $\subseteq$ Df $\Rightarrow$ D(fog) ≡ Dg = R ; (fog) = 3 sgn (x) + 6

se analiza por las condiciones de continuidad en un punto en x = 0 (donde g es discontinua).

1) $\lim_{x\to 0^+}\left(f \text{ o } g\right) = 9$; $\lim_{x\to 0^-}\left(f \text{ o } g\right) = 3 \Rightarrow$ NO $\exists$ $\lim_{x\to 0}\left(f \text{ o } g\right)$,

con lo que resulta que (fog) es discontinua para x = 0, con discontinuidad esencial.

Resulta (fog) = 3 sgn (x) + 6 es continua en R - {0} con discontinuidad esencial en x = 0

b) g o f , será continua en D(gof), salvo en los c_i, donde f(c_i) toma los valores donde g no es continua, en este caso donde se verifica 3 x + 6 = 0, lo que determina que para x = - 2 es donde debe analizarse por definición.

como If $\subseteq$ Dg $\Rightarrow$ D(gof) ≡ Df = R ; (gof) = sgn (3x + 6)

se analiza entonces, lo que ocurre en x = - 2

1) $\lim_{x\to -2^+}\left(g \text{ o } f\right) = +1$; $\lim_{x\to -2^-}\left(g \text{ o } f\right) = -1 \Rightarrow$ NO $\exists$ $\lim_{x\to -2}\left(g \text{ o } f\right)$,

con lo que resulta (gof) discontinua en x = - 2, con discontinuidad esencial, y por ello:

(gof) = sgn (3x + 6) es continua en R - {- 2} con discontinuidad esencial en x = - 2.

Es muy importante ver que el resultado obtenido para la función compuesta, determina que ella es continua en x = 0, a pesar de que no es continua en ese punto, la segunda función, g = sgn (x).

Antes se expresó el carácter unidireccional de las expresiones (*) con que se estableció la condición de continuidad para las funciones compuestas: Una función compuesta continua no asegura la continuidad de las funciones componentes.

Ello indica que la composición entre funciones discontinuas no asegura que la función compuesta resulte discontinua.

Es por ello que en las generalizaciones que se han hecho, se requiere la verificación por definición en los puntos que corresponda según las componentes, sin la cual, nada puede afirmarse.

Un ejemplo es suficiente, para probar la afirmación anterior:

Sean f(x) = [x], y $g(x) = \begin{cases} \sqrt{10} \text{ , si x es número racional} \\ \pi \text{ , si x es número irracional} \end{cases}$

Es: Df = R ; If = Z ; Dg = R ; Ig = $\{\sqrt{10}, \pi\}$; y además son discontinuas: f en todo x que no sea entero, y g en todo punto x de su dominio.

a) Para (fog), es Ig $\subseteq$ Df , con lo que D(fog) ≡ Dg = R

La composición resulta (f o g) = [g(x)] = 3 constante,

con lo que la función compuesta es continua en su dominio R, a pesar de ser resultante de la composición de dos funciones esencialmente discontinuas.

b) Para (gof), es If $\subseteq$ Dg , con lo que D(gof) ≡ Df = R

La composición ahora resulta otra constante: (g o f) ≡ g ([x]) , y, como las imágenes de [x] son todos lo enteros, y por ende racionales, la función resulta ser siempre $\sqrt{10}$, constante y continua en su dominio R.

Esto contraejemplo justifica la afirmación unidireccional de la condición de continuidad de la función compuesta entre dos funciones dadas.

Se propone analizar como práctica estos otros muy interesantes ejemplos:

a) Determinar la continuidad de (f o g) y (g o f), siendo: $f(x) = +\sqrt{x}$; $g(x) = \ln x$

b) ídem, para las funciones: $f(x) = [x]$ (parte entera) ; $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Se propone también, graficar las funciones compuestas resultantes

Teoremas de aplicación a las funciones continuas

Enunciamos aquí, para su interpretación, varios teoremas de aplicación a las funciones continuas, de los cuales demostraremos solamente el primero de ellos. Estos teoremas son de suma utilidad en desarrollos posteriores del análisis.

1) Teorema de la permanencia del signo

Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a,b], y sea c un punto interior al mismo: $c \in (a,b)$ donde $f(c) \neq 0$. (figura 21)

En esas condiciones, entonces, existe un $\lambda > 0$ tal que para todo punto del entorno reducido de centro c y radio λ la función es del mismo signo que f(c).

En símbolos, lo expresamos de esta manera:

f cont en [a,b] ; $c \in (a,b)$; $f(c) \neq 0 \Rightarrow \exists\, \lambda > 0 / \forall\, x : x \in [a,b] \wedge x \in E'(c, \lambda) \Rightarrow$ sgn f(x) = sgn f(c)

Lo demostramos para $f(c) > 0$, con razonamiento análogo si $f(c) < 0$.

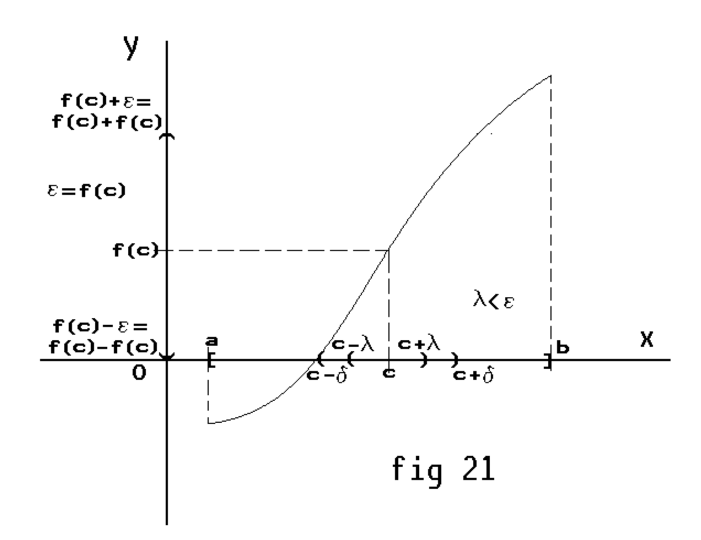


fig 21

Por hipótesis, la función f es continua en [a,b], y como $c \in (a,b)$, queda asegurado que f en continua en c, lo que afirma que:

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, por lo que, aplicando la definición de límite, se verificará:

$\forall\, \varepsilon > 0 , \exists\, \delta > 0 / \forall\, x : x \in (a,b) \wedge x \in E'(c, \delta) \Rightarrow f(x) \in E(f(c),\varepsilon)$

si en particular, se elige $\varepsilon = f(c)$ (o también cualquier $\varepsilon \leq f(c)$) , $\exists\, \delta > 0$, y, a su vez, para cualquier λ que se considere tal que $\lambda < \delta$ se cumplirá la condición de límite anterior, con lo que, expresando los entornos como intervalo, se afirma que:

$\forall x: x \in (a,b) \wedge c - \lambda < x < c + \lambda \Rightarrow f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$

y como $\lambda < \delta$ fue elegido considerando $\varepsilon = f(c)$, reemplazándolo en la última parte de la expresión anterior, la misma queda:

$0 = f(c) - f(c) < f(x) < f(c)\ \varepsilon\ f(c)$, o sea $0 < f(x)$, con lo que queda probada la tesis:

$\forall\, \varepsilon = f(c) > 0 , \exists\, \lambda > 0 : \text{si } c - \lambda < x < c + \lambda \Rightarrow f(x) > 0$
$(\lambda < \delta)$

2) Teorema del valor intermedio

Sea una función f continua en un intervalo cerrado [a,b], y k, valor comprendido entre f(a) y f(b), es decir que se cumple $f(a) < k < f(b)$ o $f(b) < k < f(a)$, según sea f(a) menor o mayor que f(b).

Entonces existe por lo menos un punto c interior a [a,b], es decir: $c \in (a,b)$ donde la función toma el valor $f(c) = k$.

Este teorema, expresa en su hipótesis, la relación de implicancia "entonces", por lo que debe tenerse en cuenta que el incumplimiento de alguna de las hipótesis dadas, no permite determinar respuesta alguna.

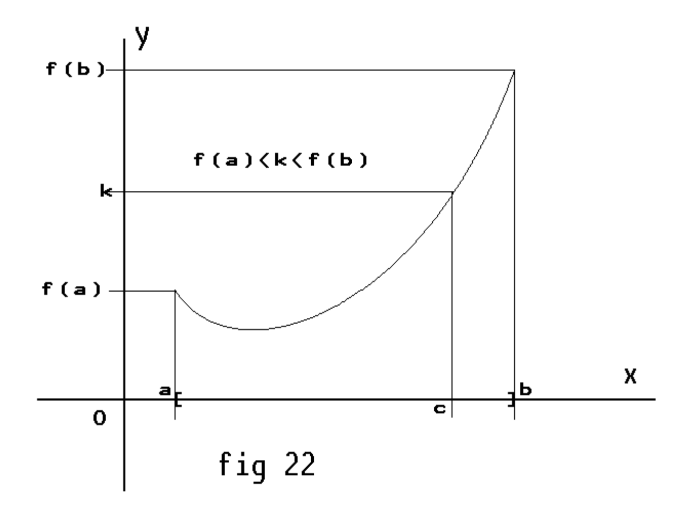


fig 22

La interpretación gráfica del teorema se muestra en la figura 22

si f cont en [a,b], y : $f(a) < k < f(b) \Rightarrow \exists\ c \in (a,b) / f(c) = k$

Recordamos que el concepto "existe" implica que hay "por lo menos uno", obviamente sin excluir que puedan existir más de uno.

Como simple ejemplo para la interpretación del teorema, supongamos que se conoce que la temperatura en una ciudad a las 6 de la mañana fue de 2ºC, mientras que a las 18 horas era de 18ºC. En ese marco, y solamente con el conocimiento del teorema tenemos los siguientes interrogantes:

a) ¿Puede afirmarse que la temperatura, en algún momento entre las 6 y las 18 horas, fue de 10ºC ?.
b) ¿Pudo alcanzar en ese lapso los 22ºC ?
c) ¿A que hora alcanzó los 10ºC ?

La respuesta a la pregunta a) es afirmativa, ya que se cumplen las hipótesis del teorema, al ser la temperatura una función continua, y los 10º un valor comprendido entre 2º y 18º, por lo que, puede asegurarse que, por lo menos en algún momento, entre las 6 y 18 horas, la temperatura tomó ese valor.

La pregunta b) no puede responderse ni afirmativa ni negativamente a la luz del teorema: no se cumple la hipótesis al no estar 22º comprendido entre 2º y 18º, por lo que el teorema no es de aplicación.

Tampoco hay respuesta para la pregunta c), ya que el teorema afirma que existe un valor para el que se verifica lo preguntado en a), pero solamente puede indicarse que está "entre las 6 y las 18 horas", es decir, dentro del intervalo abierto, sin precisar el momento en que verifica.

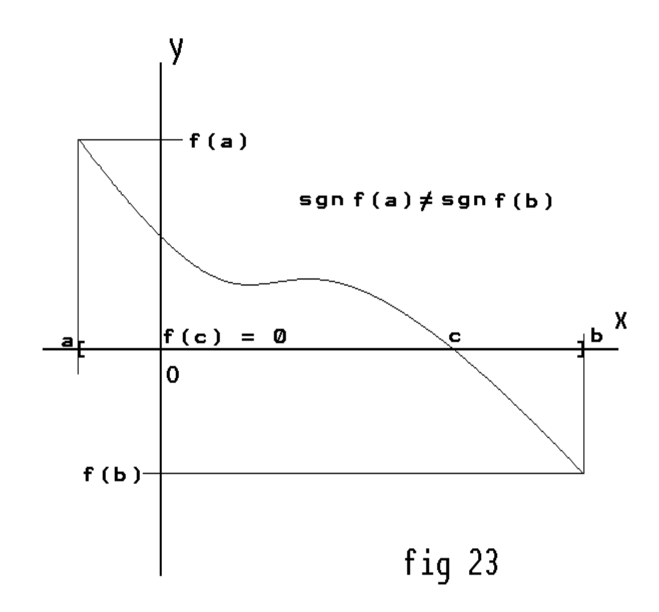
3) Teorema de Bolzano

Sea una función f continua en un intervalo cerrado [a,b], para la cual se verifica que el signo de la función en el extremo a es distinto del signo de la misma en el extremo b. Entonces existe al menos un punto c interior a [a,b] , $c \in (a,b)$, para el que se cumple que $f(c) = 0$.

Es claramente un caso particular del Teorema del Valor Intermedio, ya que por la condición de distinto signo en los extremos del intervalo, será siempre 0 un valor intermedio entre los de los extremos.

La interpretación gráfica se ve claramente en la fig 23.

si f cont en [a,b], y : $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b) \Rightarrow \exists\ c \in (a,b) / f(c) = 0$



Este teorema tiene entre otras aplicaciones, la del cálculo aproximado de raíces de funciones.

Ejemplo: sea el polinomio $p(x) = 4x^2 + 4x - 3$

a) indicar si puede afirmarse que hay raíces del polinomio en los intervalos [-2, 0] y [0,+2].
b) si existen, determinarlas con aproximación menor que 0,2 = 2/10,

Para contestar el punto a), teniendo en cuenta que el polinomio es una función continua en R, sólo debe analizarse el signo del mismo en los extremos de cada intervalo:

i) en [-2, 0] : $f(-2) > 0$; $f(0) < 0 \Rightarrow \exists$ raíz en (-2, 0)
ii) en [0,+2] : $f(0) < 0$; $f(2) > 0 \Rightarrow \exists$ raíz en (0,+2)

Por ser un polinomio de segundo grado, tiene dos raíces, con lo que puede asegurarse que se ubican las mismas una en cada intervalo.

Para resolver lo requerido en b) se deben determinar los signos de la función a partir del intervalo exigido, es decir, cada 0,2 unidades:

$f(-2) > 0$; $f(-1{,}8) > 0$; <u>$f(-1{,}6) > 0$; $f(-1{,}4) < 0$</u> ; $f(-1{,}2) < 0$; ……..

Por el razonamiento expresado, al conocer por las características de la función que hay una sola raíz en el intervalo, una vez verificado el cambio de signo, no es necesario continuar en los demás valores. Este cambio de signo asegura que ∃ una raíz x_1 del polinomio entre -1,6 y -1,4 : o sea: $x_1 \in (-1{,}6\ ,\ -1{,}4)$.

Análogamente vemos que:

$f(0) < 0$; $f(0{,}2) < 0$; <u>$f(0{,}4) < 0$; $f(0{,}6) > 0$</u> ; $f(0{,}8) > 0$:……..

Este cambio de signo indica que hay otra raíz del polinomio entre 0,4 y 0,6 : $x_2 \in (0{,}4\ ,\ 0{,}6)$.

Una vez encontradas estas raíces con la aproximación deseada de 0,2 unidades, puede mejorarse tanto como se quiera el error máximo, subdividiendo nuevamente esos intervalos con el objeto de determinar aproximaciones mayores si fuera necesario. Obviamente se puede llegar a la aproximación que se desee.

<u>Máximos y mínimos absolutos y relativos en funciones reales</u>

Para expresar otro importante teorema aplicable a funciones continuas, es necesario definir los conceptos de máximos y mínimos, en general llamados extremos, siendo ellos, absolutos y relativos.

Sea una función f, con dominio Df, y consideramos $A \subseteq Df$.

El valor f(c) es el máximo absoluto de la función f en el conjunto A si y solo si f(c) no es superado por ninguno de los valores f(x) que toma la función en el conjunto A.

f(c) es máximo abs de f en A $\Leftrightarrow \forall x: / x \in A \Rightarrow f(x) \leq f(c)$

El valor f(c) es el mínimo absoluto de la función f en el conjunto A si y solo si f(c) no supera a ninguno de los valores f(x) que toma la función en el conjunto A.

f(c) es mínimo abs de f en A $\Leftrightarrow \forall x: / x \in A \Rightarrow f(x) \geq f(c)$

Si una función tiene máximo absoluto y mínimo absoluto en su dominio, se dice que es acotada en su dominio.

Análogamente puede expresarse como acotada en un intervalo, si cumple la condición de tener máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

También se definen, para una función f con dominio Df, los conceptos de extremos relativos en un punto c, para un intervalo I que puede ser parte o todo el dominio de la misma: $I \subseteq Df$, y siendo c un punto interior a dicho intervalo, o sea cuando existe un entorno de ese punto perteneciente a I . El requerimiento de que c sea interior, hace que no sea de aplicación la definición para un extremo del intervalo.

El valor f(c) es un máximo relativo de la función f si y solo si existe un entorno del punto c tal que los valores que toma la función f en los puntos del entorno, no superan el valor de f(c).

f(c) máx rel $\Leftrightarrow \exists E(c) \subseteq Df / \forall x : x \in E(c) \Rightarrow f(x) \leq f(c)$

El valor f(d) es un mínimo relativo de la función f si y solo si existe un entorno del punto d donde se verifica que f(d) no supera los valores que toma la función f en los puntos del entorno.

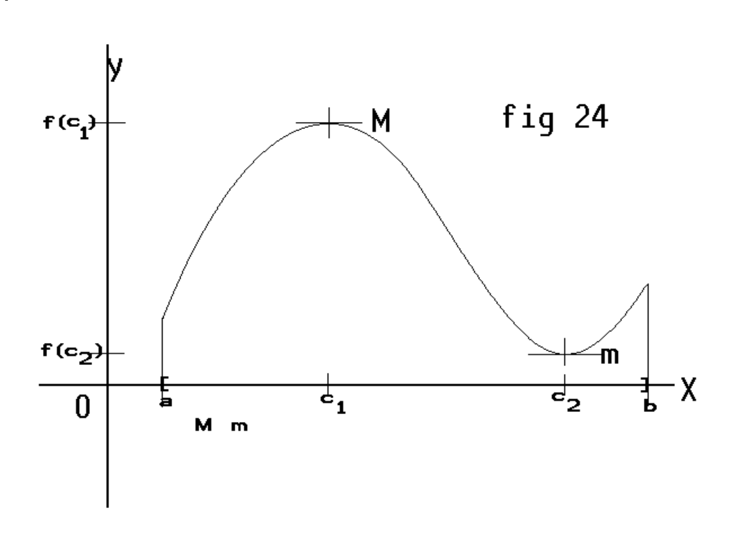
f(d) mín rel $\Leftrightarrow \exists E(d) \subseteq Df / \forall x : x \in E(d) \Rightarrow f(x) \geq f(d)$

4) Teoremas de Weierstrass

Pueden expresarse como dos teoremas separadamente o incluir ambos enunciados en una expresión única. Los enunciamos como: (fig 24). Si f es una función continua en un intervalo [a,b], entonces:

i) La función está acotada en dicho intervalo, y:

ii) La función alcanza en el intervalo, un valor máximo absoluto M y un mínimo absoluto m.



i) f cont en $[a,b] \Rightarrow$ f acotada en $[a,b]$: $\forall x : -C \leq f(x) \leq +C$

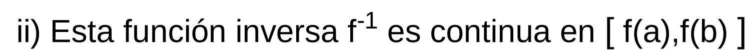
ii) f cont en $[a,b] \Rightarrow \begin{cases} \exists\, c_1 \in [a,b]: \forall x \in [a,b] \Rightarrow f(c_1) = M \geq f(x) \\ \exists\, c_2 \in [a,b]: \forall x \in [a,b] \Rightarrow f(c_2) = m \leq f(x) \end{cases}$

<u>5) Teorema sobre continuidad de funciones inversas</u> (fig 25)

Sea f una función continua en el intervalo [a,b], y monótona (estrictamente creciente o estrictamente decreciente) en dicho intervalo:



i) Existe la función inversa de f en el intervalo [f(a),f(b)]



ii) Esta función inversa f^{-1} es continua en [f(a),f(b)]

iii) f^{-1} es monótona de igual sentido en [f(a),f(b)].

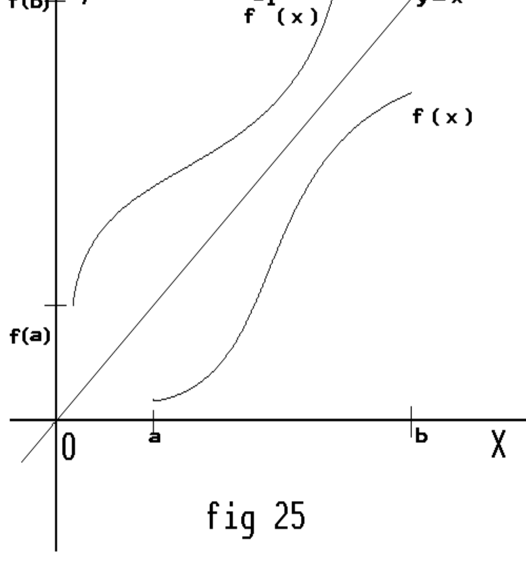


fig 25

f : cont y monótona en [a,b] $\Rightarrow$

i) $\exists\, f^{-1}$ en [f(a),f(b)] ;

ii) f^{-1} es cont en [a,b] ;

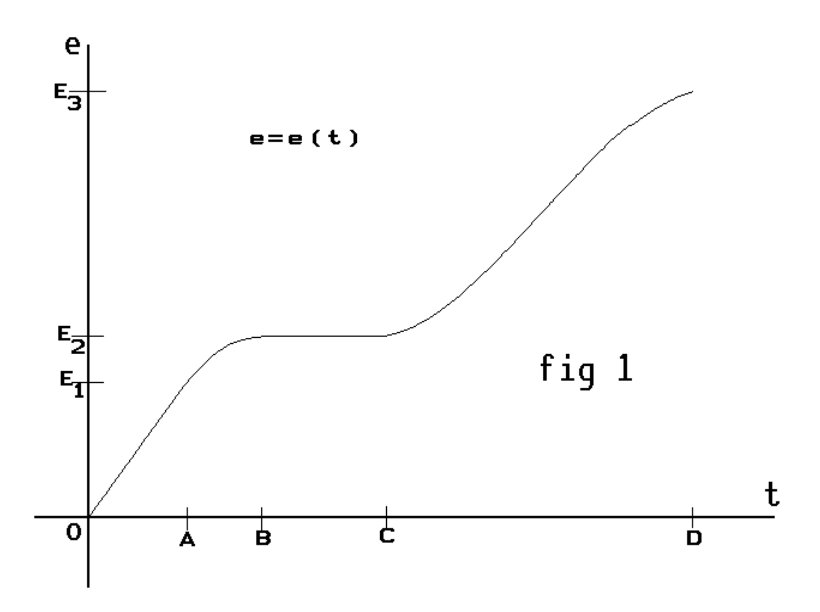
iii) f^{-1} monótona (es de igual crecimiento o decrecimiento) en [f(a),f(b)].

Introducción al concepto de derivada

Se considera conveniente efectuar como introducción al concepto de derivada algunas consideraciones físicas y geométricas ya conocidas.

Concepto de velocidad instantánea

Consideramos una cierta ley del movimiento de un objeto que recorre cierto espacio en función del tiempo transcurrido, pudiéndose expresar esa ley como e = e (t), y representarla gráficamente (figura 1), suponiendo el origen de los tiempos y de los espacios recorridos en el origen de coordenadas.



El análisis de la misma, con el concepto físico conocido, nos indica que desde el instante O hasta el A la velocidad desarrollada es constante, entre A y B la velocidad es variable, entre los tiempos B y C el móvil ha estado detenido, y entre C y D también ha tenido velocidad variable.

La velocidad constante en OA es $v = \frac{e}{t}$; En el tramo BC, con el móvil detenido es v = 0.

En los tiempos entre A y B, y entre C y D, se puede determinar el conocido concepto del "promedio" de la velocidad, o velocidad media en cada tramo, por ejemplo

En los tiempos CD: v (velocidad media) $= \frac{E_2 - E_1}{D - C} = \frac{\Delta e_{CD}}{\Delta t_{CD}}$

También puede expresarse la velocidad media resultante de considerar el total del recorrido:

En todo el recorrido : v (velocidad media) $= \frac{E_3 - E_0}{D - 0} = \frac{\Delta e_{total}}{\Delta t_{total}}$

Pero es frecuente que ocurra que la velocidad media no sea representativo, o no nos de respuestas satisfactorias a determinadas características de un problema, por presentar variaciones importantes de la velocidad en cada instante.

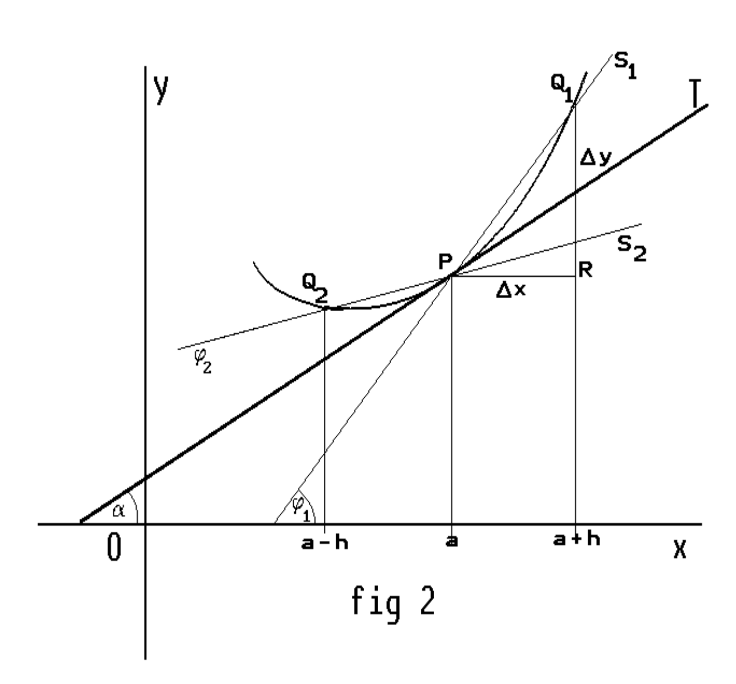
Eso lleva en forma natural a buscar intervalos más cortos de tiempos y consecuentemente de espacios en busca de acercarse a la velocidad en cada punto, que es la velocidad instantánea.

El concepto de límite ya desarrollado permite expresar, para la velocidad entre dos instantes cada vez menores, la velocidad en un instante c, como $v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$

Con lo que resulta que v_c : velocidad instantánea en el momento c es el límite del cociente entre las variaciones de los espacios y del tiempo a partir del instante c, cuando la variación del tiempo tiende a cero.

En símbolos: $v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(c + \Delta t) - f(c)}{\Delta t}$

Concepto de Tangente a una curva plana



Sea la gráfica de una curva como la indicada en la figura 2, donde el punto P sobre la misma, corresponde a un valor "a" del dominio de la función correspondiente.

También consideramos los puntos Q_1 y Q_2 que corresponden a los puntos próximos : a + h, y a - h , y que determinan con P dos rectas secantes que se indican con S_1 y S_2.

Si se disminuye el valor de h, de manera que los puntos Q_1 y Q_2 se van aproximando cada vez más al punto P, se van formando respectivamente otras secantes, todas ellas con un punto común que es P, y los otros variables que son Q_1 y Q_2 que se mueven sobre la curva.

Aplicando el concepto de límite, y considerando la aproximación cuando $h \to 0$, es evidente que entonces el punto $Q_1 \to P$ y también que $Q_2 \to P$, con lo que las secantes $S_1 \to T$, y también $S_2 \to T$, es decir que ambas secantes tienden a ser la tangente T en el punto P.

Llamando Φ al ángulo que forma S_1 con el eje x (razonamiento análogo para S_2), será para Φ: $\text{tg}\,\Phi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, de manera que expresada como la variación de la función entre a y a + h, resulta:

$$\text{tg}\,\Phi = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En el límite cuando $h \to 0$, será $S_2 \to T$, y, $\Phi \to \alpha$, lo que se expresa como límite:

$$\text{tg}\,\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Con lo que nuevamente aparece en esta concepción geométrica, la misma idea expresada en el ejemplo anterior físico: en ambos casos se ha planteado el límite del cociente entre la variación de la función y la variación de la variable, cuando la variación de la variable tiende a cero.

Existen numerosas aplicaciones de otras disciplinas: en economía, biología, física, química, termodinámica, y muchas más, en las que se plantea la necesidad de calcular un límite en las condiciones señaladas.

El esquema que se aplica en todos los casos es determinar para la función que corresponda a las características del problema planteado, el límite en un punto, límite que invariablemente será el del cociente entre la variación de la función y la variación de la variable, precisamente cuando la variación de la variable tiende a cero.

Desde ya que el límite a obtener deberá existir y ser finito, para la correcta y completa interpretación del concepto de que se trate en cada problema concreto.

Por tratarse de un límite, serán válidas las definiciones dadas sobre límites laterales e infinitos, que deberán interpretarse precisamente conforme en caso de que se trate.

Esto nos permite definir el importante concepto de derivada de una función.

<u>Derivada de una función en un punto</u>

Supongamos una función f definida en un intervalo [a,b] , con valores reales en ese intervalo. Si para un valor cualquiera x del intervalo abierto : $x \in (a,b)$, se forma el cociente:

$\dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$, con : $a < t < b$, y con : $t \neq x$

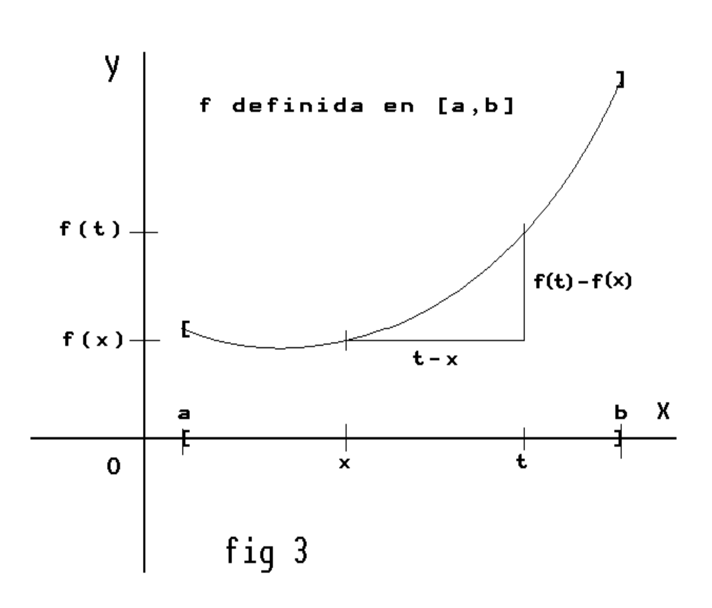


fig 3

Este cociente se puede llamar Φ(t), por ser precisamente una función de esta variable, ya que a cada valor de t le corresponde un valor del mencionado cociente.

Este cociente existe siempre, ya que especificamos como condición que $t \neq x$, con lo que el denominador no se anula, y f (t) y f (x) existen por hipótesis para todo punto del intervalo [a,b].

Será entonces:

$$\Phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad \text{con : } a < t < b \text{ , y siendo : } t \neq x$$

Si en esas condiciones, se calcula $\lim\limits_{t \to x} \Phi(t)$, y, si este límite existe, finito, se lo llama <u>derivada de la función f en el punto x</u>, y se simboliza como: $\lim\limits_{t \to x} \Phi(t) = f'(x)$.

Este importante concepto del análisis matemático expresa lo dicho, en resumen, de esta manera:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Esta expresión, que se ha definido como derivada para un punto x (o en un punto x), es aplicable para todos los valores del intervalo [a,b], y genéricamente para el dominio que tenga la función f, ya que el único requisito que se exige para poder plantear el límite que la define, es que exista la función en el punto, o lo que es lo mismo, que esté definida en él.

A su vez, para que la derivada exista, el límite que se obtenga tiene que existir y ser finito, lo que no necesariamente puede asegurarse que ocurra en cada punto del dominio.

Es importante establecer, entonces, la correspondencia entre cada punto x del dominio y la derivada en el mismo, que será única cuando ella existe, por la unicidad ya demostrada para el límite finito.

Esta correspondencia lleva al concepto de función derivada. Así se llama a la que resulta asociada a una función f, con dominio Df, para la que se aplica punto a punto la definición dada.

Esta nueva función se simboliza con f ', su dominio será Df ', y se verifica inmediatamente que entre los dominios de una función y su función derivada se cumple la relación: $Df' \subseteq Df$.

Existen muchas formas de notación para la función derivada de una f(x):

$$f'(x) \;;\; D_x f \;;\; \frac{df}{dx} \;;\; \frac{dy}{dx} \;;\; y'_x \;;\; D_x y \quad \text{y otras más}$$

También hay numerosas formas equivalentes para expresar el concepto del límite que define la derivada en un punto: así como se ha llamado "x" al punto en que la misma se define, también suele designarse como a, o como x_0, mientras que el punto variable que nominamos "t", también se lo señala como x, x+h, x + Δx, ó x_1. De esas maneras, es conceptualmente equivalente llamar:

$$f(x) \equiv f(a) \equiv f(x) \equiv f(x) \equiv f(x_0) \quad \text{al punto en que definimos la derivada}$$

y a su vez: $f(t) \equiv f(x) \equiv f(x+h) \equiv f(x+\Delta x) \equiv f(x_1)$ sus respectivos puntos variables

De esta manera, las nomenclaturas para expresar la derivada en un punto resultan de distinta forma, aunque corresponden, todas ellas, por supuesto, a idéntico concepto, serían algunas de ellas las siguientes:

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad ; \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad ;$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad ; \quad f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad ;$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Lo importante es que genéricamente, simbolizando con Δ, a la "variación", el concepto es único:

$$f'(\text{derivada}) = \lim_{\Delta \text{ de la variable} \to 0} \frac{\Delta \text{ de la función}}{\Delta \text{ de la variable}}$$

Así resulta la derivada como el límite del cociente entre las variaciones de la función y de la variable, cuando la variación de la variable tiende a cero. El cociente de las variaciones se acostumbra a llamar cociente incremental.

Así resulta que el problema de determinar la derivada de una función en un punto determinado del dominio de la misma, se reduce al simple cálculo de un límite.

Sea: calcular la derivada de f (x) = 3 x + 2 en el punto x = 3.

$$f'(3) = \lim_{t\to 3} \frac{f(t)-f(3)}{t-3} = \lim_{t\to 3} \frac{(3t+2)-(3.3+2)}{t-3} = \lim_{t\to 3} \frac{3t-9}{t-3} = \lim_{t\to 3} \frac{3(t-3)}{t-3} = 3$$

Si se quiere determinar la derivada de la misma función pero en un punto genérico x, lo que equivale a determinar la función derivada de f:

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{(3t+2)-(3.x+2)}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{3t-3x}{t-3} = \lim_{t\to x} \frac{3(t-x)}{t-x} = 3$$

Con lo que resulta $f'(x) = \text{constante} = 3$ Atención: no debe pensarse que este resultado constante para las derivadas es válido siempre.

Interpretación geométrica de la derivada

Si consideramos la gráfica de una función f, y en ella se analiza un punto x para el que aquella está definida con valor f (x), resulta A el punto de coordenadas (x ; f (x)).

Sea ahora un punto cualquiera, variable t, próximo a x, y dentro del dominio de definición de f, lo que ubica en la gráfica el punto B, cuyas coordenadas son (t ; f (t)).

Trazando la recta secante a la curva S, su pendiente, que es la tangente del ángulo θ que forma S con el eje de las abscisas es la expresión de la función Φ (t), ya que se verifica fácilmente que:

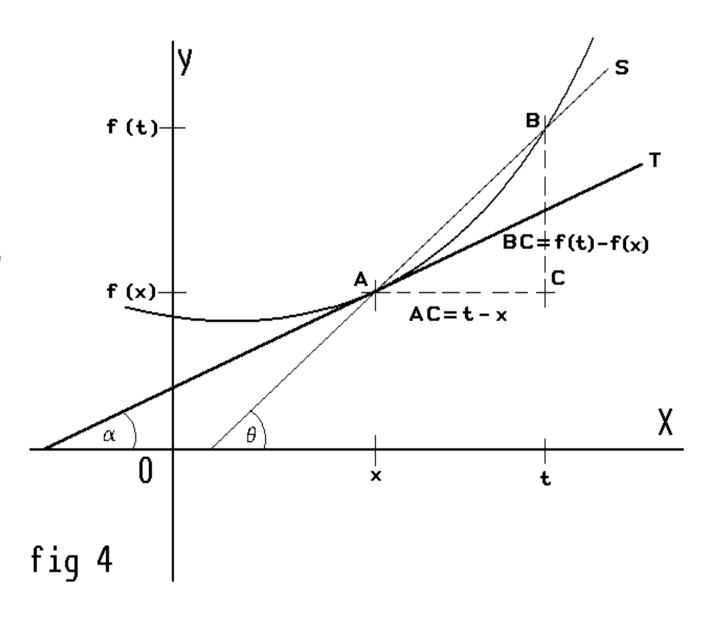


fig 4

$$\Phi\,(t) \;=\; \frac{f(t)\;-\;f(x)}{t\;-\;x} \;=\; \frac{BC}{AC} \;=\; tg\,\theta \;=\; m_s$$ siendo m_S la pendiente de la recta secante

Si se considera ahora el límite de la expresión anterior cuando $t \to x$, lo que corresponde a la definición de la derivada en el punto x, y teniendo en cuenta que si t tiende a x, consecuentemente B tiende a A, por lo que la recta secante S tiende a ser la tangente T, y la tangente del ángulo θ pasa a ser la tangente del ángulo α y por ende la pendiente de la recta secante m_S pasará a ser la pendiente de la recta tangente m_T :

$t \to x \Rightarrow B \to A \Rightarrow S \to T \Rightarrow tg\,\theta \to tg\,\alpha \Rightarrow m_S \to m_T$

Con lo que: $f'(x) \;=\; \lim\limits_{t\to x} \Phi\,(t) \;=\; \lim\limits_{t\to x} \dfrac{f(t)\;-\;f(x)}{t\;-\;x} \;=\; tg\,\alpha \;=\; m_T$

En resumen: $\boxed{f'(x) \;=\; tg\,\alpha \;=\; m_T}$

De lo que resulta la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto es (su valor numérico) la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de coordenadas (x ; f (x)).

Nunca debe decirse que la derivada “es” la tangente a la curva, sino que lo que hemos visto acá es su interpretación geométrica. Es muy común expresar mal los conceptos.

Ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva

Sea la gráfica de una función f, y consideramos un punto de abscisa x_0 en el que la misma tenga derivada de valor $f'(x_0)$.

El punto referido A, tendrá por coordenadas $(x_0;f\,(x_0))$, por donde trazamos la recta tangente a la curva T, y la normal a la misma N, siendo lógicamente T y N perpendiculares.

fig 5

Por la interpretación geométrica de la derivada que ya se ha visto, es: $m_T = f'(x_0)$, y por la condición de perpendicularidad entre rectas es: $m_N = \dfrac{-1}{f'(x_0)}$.

Ello permite determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal, ya que pasan por A y se conocen sus respectivas pendientes. Serán ellas:

Ecuación de T: $y \;-\; f\,(x_0) = f'\,(x_0)(x \;-\; x_0)$

Ecuación de N: $y \;-\; f\,(x_0) = -\;\dfrac{1}{f'\,(x_0)}(x \;-\; x_0)$

Derivadas de las funciones elementales

La definición de función derivada aplicada a las funciones elementales, y el posterior concepto del álgebra de derivadas, permiten en la práctica la determinación por cálculo de la derivada de cualquier función, por complicada que ella sea, siguiendo esas reglas.

Para poder operar de esta manera, se determinan primeramente, una a una, las funciones derivadas correspondientes a las funciones elementales. Se utilizarán para ello, como práctica, las diversas nomenclaturas mencionadas.

Función constante: $f(x) = C \;;\; f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{C-C}{x-a} = 0$

$$\boxed{f(x) = C \;\Rightarrow\; f'(x) = 0}$$

Función identidad: $f(x) = x \;;\; f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$

$$\boxed{f(x) = x \;\Rightarrow\; f'(x) = 1}$$

Función lineal: $f(x) = m\,x + n \;;\; f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[m(x+\Delta x)+n\right]-(mx+n)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{mx+m.\Delta x+n-mx-n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m.\Delta x}{\Delta x} = m$$

$$\boxed{f(x) = mx+n \;\Rightarrow\; f'(x) = m}$$

Función seno: $f(x) = \text{sen}\,x \;;\; f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t \to x} \frac{\text{sen}\,t-\text{sen}\,x}{t-x} =$

$$= \lim_{t \to x} \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(t-x).\cos\frac{1}{2}(t+x)}{\frac{1}{2}(t-x)} = \lim_{t \to x} \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(t-x)}{\frac{1}{2}(t-x)}.\cos\frac{1}{2}(t+x) =$$

$$= 1.\lim_{t \to x} \cos\frac{1}{2}(t+x) = \cos x$$

$$\boxed{f(x) = \text{sen}\,x \;\Rightarrow\; f'(x) = \cos x}$$

Función coseno: $f(x) = \cos x$, se llega con camino similar a $f'(x) = -\,\text{sen}\,x$

$$\boxed{f(x) = \cos x \;\Rightarrow\; f'(x) = -\,\text{sen}\,x}$$

<u>Función potencial</u>: $f(x) = x^n$ (con n ∈ N)

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{t^n - x^n}{t-x}$$ = haciendo el cociente de los polinomios =

$$= \lim_{t\to x} (t^{n-1} + x\,t^{n-2} + x^2\,t^{n-3} + \dots + x^{n-2}\,t + x^{n-1})$$ = pasando al límite =

$$= x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1} =$$ (por ser n sumandos iguales) $= n\,x^{n-1}$

Cabe aclarar que, si bien la demostración de la función derivada de la función potencial se ha hecho cuando n es natural (si no es así no es válida la división entre polinomios efectuada), es idéntico el resultado de la derivada de $f(x) = x^n$, si n ∈ R. Se demostrará mas adelante.

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$$

No existencia de la derivada

La derivada de una función en un punto de la misma ha sido definida a partir del límite del cociente entre las variaciones de la función y la variable cuando la variación de la variable tiende a cero, y <u>la derivada en el punto existe siempre y cuando exista el límite así definido</u>.

La no existencia de ese límite en el punto en que se busca determinar la derivada indica en consecuencia, que no existe derivada para el mismo.

Análogamente a lo expresado en el tema de límites, la presencia de límites laterales (uno o ambos) o de límite infinito trae en forma natural el concepto de derivadas laterales y de derivadas infinitas.

Derivadas laterales

Cuando el límite de la función Φ para t → x no existe, o sea: $\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \nexists$, pero existe alguno o ambos los límites laterales, es decir, que: $\exists \lim_{t\to x^+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ y/o $\exists \lim_{t\to x^-} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$, quedan así naturalmente definidas la o las <u>derivadas laterales</u> en el punto

analizado, que quedan expresadas de esta manera:

$$f'(x)^+ = \lim_{t\to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \quad \text{o} \quad f'(x)^- = \lim_{t\to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t-x}$$

Ejemplo:

$f(x) = |x|$, sabemos que en x = 0 : $\nexists \lim f(x)$, pero se verifica que $\exists$ los límites laterales

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = +1$$, y también $$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

La interpretación geométrica ya vista para la derivada en un punto, tiene una equivalencia clara con el concepto de derivadas laterales, ya que no existe aquí tangente en el punto x = 0, pero existen dos "tangentes" a izquierda y derecha del mismo.

Derivadas infinitas

En forma también análoga con el concepto de límite infinito, se dice que una función tiene derivada infinita en el punto a de su dominio, si se verifica:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$$ No existe derivada finita, conforme definición en el punto a.

Sea el caso: $f(x) = +\sqrt{x}$, para la que se quiere determinar su derivada en x = 0

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{+\sqrt{x} - +\sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(+\sqrt{x}).(+\sqrt{x})}{x(+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{+\sqrt{x}} = \infty$$

Aquí la interpretación geométrica es también de total analogía, ya que la tangente a la curva en el punto es una recta vertical, para la que no existe pendiente finita.

Derivabilidad y continuidad - Teorema

Un teorema de gran importancia es el que asegura que, si una función es derivable en un punto, entonces en continua en ese punto, mientras que no es válida la implicancia recíproca.

Enunciamos como tesis: Si una función f está definida en [a,b], y dicha función f es derivable en x ∈ (a,b) entonces la función f es continua en x

En símbolos: f es derivable en x ⇒ f es continua en x

Para la sencilla demostración, se parte de la elemental igualdad: (obviamente válida si $t \neq x$)

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}(t - x)$$

Tomando el límite, en ambos miembros, para $t \to x$, y teniendo en cuenta que el primer factor del producto del segundo miembro es precisamente el cociente de las variaciones, resulta por propiedad de límites:

$$\lim_{t \to x} \left[f(t) - f(x)\right] = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}(t - x) = f'(x).\lim_{t \to x} (t - x) = 0$$

Resultado es válido porque existe $f'(x)$ finito, al ser f derivable en x por hipótesis.

Finalmente, aplicando propiedad de límites para la diferencia y trasponiendo términos, se verifica que: $\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$, que es la condición de continuidad para el punto x y verifica la tesis:

la función f es continua en x.

La demostración de que la implicancia recíproca no es válida, que la continuidad de una función en un punto no asegura la derivabilidad de ella en dicho punto, es inmediata a partir de un simple contraejemplo: la función $f(x) = |x|$ que es continua en x = 0, y no es derivable en dicho punto.

Álgebra de las derivadas

Así como se han presentado las características del álgebra de funciones, de los límites y para las funciones continuas, corresponde referirse al álgebra de las derivadas, que permite resolver las derivadas de otras funciones no elementales, o de las que pueden expresarse como operaciones entre funciones.

Sean f y g definidas en [a,b] y ambas derivables en $x \in (a,b)$.

Entonces, las funciones suma, resta, producto y cociente entre ambas funciones son también derivables en x, con la excepción para la función cociente cuando $g(x)$ = 0. Se cumple que:

a) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

b) $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

c) $(f \cdot g)'(x) = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g'(x) - g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}, \text{ con } g(x) \neq 0$

Las demostraciones se efectúan aplicando la definición de derivada para cada una de las operaciones de que se trate, desarrollando con simples pasos algebraicos y teniendo en cuenta el álgebra de límites. A título de ejemplo se demuestran para la suma y el producto.

Demostración para la suma

$$(f + g)'(x) = \lim_{t \to x} \frac{(f+g)(t) - (f+g)(x)}{t - x} = \text{ y aplicando propiedades de limites } =$$

$$= \lim_{t \to x} \frac{[f(t) + g(t)] - [f(x) + g(x)]}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{[f(t) - f(x)] + [g(t) - g(x)]}{t - x}$$

$$= \lim_{t \to x} \frac{[f(t) - f(x)]}{t - x} + \lim_{t \to x} \frac{[g(t) - g(x)]}{t - x} = f'(x) + g'(x) \text{ (que es la tesis)}$$

Demostración para el producto

$$(f\,.g)'(x) = \lim_{t\to x} \frac{(f\,.g)(t)-(f\,.g)(x)}{t-x} = \text{ por prop de limites } = \lim_{t\to x} \frac{f(t).g(t)-f(x).g(x)}{t-x} =$$

como artificio se suma y resta $f(x).g(t)$ en el numerador de la expresión anterior

$$= \lim_{t\to x} \frac{f(t).g(t) - f(x).g(x) + f(x).g(t) - f(x).g(t)}{t-x}$$, y agrupando adecuadamente

$$= \lim_{t\to x} \frac{\left[f(t) - f(x)\right].g(t) + f(x).\left[g(t) - g(x)\right]}{t-x}$$, por propiedad de límites

$$= \lim_{t\to x} \frac{\left[f(t) - f(x)\right]}{t-x}.g(t) + \lim_{t\to x} f(x).\frac{\left[g(t) - g(x)\right]}{t-x}$$, por definición de derivada

$= f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$ (que es la tesis)

En forma similar se pueden demostrar las restantes expresiones.

Derivada de las funciones compuestas - Regla de la cadena

Completando el tema del álgebra de las derivadas, se define la derivada para una composición de funciones, a través de una expresión general, cualquiera sea el número de funciones intervinientes en la composición, lo que constituye la llamada regla de la cadena.

Consideremos la composición: $(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right]$, y enunciamos:

Si: i) la función g es derivable en x, y ii) la función f es derivable en g (x), entonces:

1) la función compuesta es derivable en x, y

2) su derivada es: $(f \circ g)'(x) = f'\left[g(x)\right].g'(x)$

Es análogo para la composición $(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] \Rightarrow (g \circ f)'(x) = g'\left[f(x)\right].f'(x)$

Sean los siguientes casos de composición, para derivar aplicando la Regla de la Cadena:

Ejemplo 1) $f(x) = x^6$; $g(x) = \text{sen } x \Rightarrow (f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = \text{sen}^6 x$

la Regla de la Cadena nos dice que : $(f \circ g)'(x) = f'\left[g(x)\right].g'(x)$ que aplicada para la función compuesta dada, resulta: $(f \circ g)'(x) = 6\,\text{sen}^5 x.\text{sen } x$

Ejemplo 2) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \text{tg } x \Rightarrow (g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = \text{tg}\sqrt{x}$

en este caso, será: $\left(g \circ f\right)'(x) = g'\left[f(x)\right]f'(x)$, y aplicando la Regla de la Cadena, resulta para esta otra composición: $\left(g \circ f\right)'(x) = (\sec^2\sqrt{x}).\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Aplicaciones del Álgebra de las Derivadas

Las expresiones del álgebra de las derivadas, permiten extender notablemente la determinación de las derivadas de otras funciones. Sea, como ejemplo, calcular la función derivada de la función tangente, a partir de la derivada de un cociente:

$f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, aplicando en este caso la derivada de un cociente, resulta:

$$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)'.(\cos x) - (\operatorname{sen} x).(\cos x)'}{\left[(\cos x)\right]^2} =$$

$$= \frac{(\cos x).(\cos x) - (\operatorname{sen} x).(-\operatorname{sen} x)}{\left[(\cos x)\right]^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2}{\left[(\cos x)\right]^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\boxed{f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x}$$

Derivada de la función logaritmo natural: $f(x) = \ln x$

Esta función elemental, requiere la determinación de su función derivada, a partir de la definición. Será, con a > 0, el cálculo del límite correspondiente, que obliga a efectuar algunos artificios para resolverlo:

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ para $f(x) = \ln x$ tenemos:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}} =$$

$$= \ln \left(\lim_{x \to a} \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}} \text{ (sumando y restando 1) } = \ln \left[\lim_{x \to a} \left(1 + \frac{x}{a} - 1\right)\right]^{\frac{1}{x-a}} =$$

$$= \ln \left[\lim_{x \to a} \left(1 + \frac{x-a}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\right] \text{ (mult y div por a el exponente) } = \ln \left[\lim_{x \to a} \left(1 + \frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}.\frac{1}{a}}\right]$$

$$\text{(haciendo } z = \frac{a}{x-a} \text{ y operando) } = \ln \left[\lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{.\frac{1}{a}} = \ln (e)^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} \ln e = \frac{1}{a} \text{ con lo que}$$

$$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Derivación logarítmica

Los conceptos de la derivación de funciones compuestas y de la función derivada del logaritmo natural, permiten, en su aplicación conjunta, resolver mediante el mecanismo llamado derivación logarítmica un sinnúmero de derivadas de otras funciones.

El procedimiento consiste en aplicar la función logaritmo natural en ambos miembros de la expresión de la función f(x) que se desea derivar, y luego aplicar las reglas de derivación en ambos miembros.

En general, para una función cualquiera, $y = f(x)$, aplicando logaritmo miembro a miembro, siempre se obtiene, para cualquiera sea la función: $\ln y = \ln\left[f(x)\right]$, y, derivando ambas expresiones, resulta: $(\ln y)' = \frac{1}{y}.y'$

Teniendo en cuenta lo anterior, la aplicación de esta metodología, permite ampliar el campo de las derivadas de otras funciones. Ejemplo:

Derivada de la función x^k: Sea: $f(x) = x^k$, para x > 0 , y para cualquier k ∈ R. Para derivarla:

1) Aplicamos en ambos miembros logaritmo natural: $\ln\left[f(x)\right] = k.\ln x$;

2) Derivando ambos miembros como funciones compuestas: $\frac{1}{f(x)}.f'(x) = k.\frac{1}{x}$;

3) despejando $f'(x)$ que es lo que se quiere determinar: $f'(x) = f(x).k.\frac{1}{x}$;

4) y reemplazando $f(x)$ por x^k , se tiene $\boxed{f(x) = x^k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = k\,x^{k-1}}$

Válida para todo k ∈ R y muestra ahora una expresión similar a la demostrada para n ∈ N

Las siguientes determinaciones con la derivación logarítmica siguen la misma secuencia metodológica descripta en el ejemplo anterior.

Derivada de la función exponencial: $f(x) = a^x$ (con a > 0)

Para derivarla, seguimos los mismos cuatro pasos anteriores :

1) $\ln\left[f(x)\right] = x.\ln a$; 2) $\frac{1}{f(x)}.f'(x) = \ln a$; 3) $f'(x) = f(x).\ln a$;

4) resultado de la derivada: $\boxed{f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x.\ln a}$

Y como caso particular con base e: $\boxed{f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x}$

Derivada general de una función elevada a otra función: $y = g(x)^{h(x)}$

La derivamos con la metodología habitual en los cuatro pasos:

1) aplicamos ln en ambos miembros: $\ln y = h(x).\ln\left[g(x)\right]$
2) derivando m a m con las propiedades conocidas:

$$\frac{y'}{y} = h'(x).\ln\left[g(x)\right] + h(x).\frac{1}{g(x)}.g'(x)$$

3) despejando y' : $y' = y\left\{h'(x).\ln\left[g(x)\right] + h(x).\frac{1}{g(x)}.g'(x)\right\}$

4) reemplazando por la f unción $y = g(x)^{h(x)} \Rightarrow$

$$y' = g(x)^{h(x)}\left\{h'(x).\ln\left[g(x)\right] + h(x).\frac{1}{g(x)}.g'(x)\right\}$$

Derivadas de funciones inversas

Este importante teorema vincula las derivadas entre funciones respectivamente inversas, y también permite ampliar el campo de la determinación de las derivadas de otras funciones.

Para su aplicación, deben tratarse de funciones monótonas, para que se asegure la existencia de las respectivas funciones inversas, siendo válido considerar, cuando sea ello necesario, la restricción del dominio respectivo.

Teorema: Sea f una función monótona, y g su función inversa, entonces podemos decir que: Si f tiene derivada finita no nula en a, entonces f^{-1} tiene derivada finita no nula en f(a), cumpliendose que: $f^{-1\prime}\left[f(a)\right] = \frac{1}{f'(a)}$

Para su demostración se parte de saber que la composición entre una función y su inversa da por resultado la función identidad, o sea que: $\forall$ x: $f^{-1}(x)\left[f(x)\right] = x$ (*), por lo que, si tenemos: $y = f(x)$; $x = f^{-1}(y)$

derivando (*) miembro a miembro con la regla de la cadena; $f^{-1\prime}\left[f(x)\right].f'(x) = 1$ y despejando resulta la tesis: $\boxed{f^{-1\prime}\left[f(x)\right] = \frac{1}{f'(x)}}$ que puede expresarse también con otras formas, tales como:

$$f^{-1\prime}\left[y\right] = \frac{1}{f'(x)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

La aplicación de este teorema, nos permite calcular las derivadas de otras funciones, conociendo las de sus funciones inversas. Ejemplos:

Derivada de la función arco seno: y = arc sen x

Las funciones: y = arc sen x ; x = sen y (con $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$) son respectivamente inversas, y permiten aplicar el teorema.

Se busca la derivada de la función arco seno, la que se puede obtener, a partir de ser conocida la de su función inversa, la función seno.

Como: x = sen y $\Rightarrow$ x'_y = cos y, y entonces, se cumplirá, por el teorema, que:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$ y tenemos la derivada buscada

$$f(x) = \operatorname{arc\,sen} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La metodología permite calcular de la misma manera las derivadas de las otras funciones inversas de las trigonométricas: arc cos x ; arc tg x ; arc cotg x ; arc sec x ; arc cosec x.

Derivada de la función exponencial: $y = e^x$

Si bien la derivada ya ha sido calculada, vale como ejemplo su determinación utilizando el teorema de las derivadas de funciones inversas.

Las funciones $y = e^x$; x = ln y son las respectivas funciones inversas; por lo que: $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ y también: $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, y consecuentemente ahora, aplicando el teorema resulta simplemente:

$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$, con lo que se confirma el resultado que ya conocíamos anteriormente

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Derivadas de las funciones hiperbólicas:

Resulta de muy sencilla determinación el cálculo de las funciones derivadas de las funciones hiperbólicas, a partir de su expresión que las define como operaciones sencillas entre e^x y e^{-x}, ya que rápidamente se obtienen:

$$f(x) = \text{Sh } x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \Rightarrow f'(x) = (\text{Sh } x)' = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \text{Ch } x$$

$$\boxed{f(x) = \text{Sh } x \Rightarrow f'(x) = \text{Ch } x}$$

$$g(x) = \text{Ch } x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) \Rightarrow g'(x) = (\text{Ch } x)' = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \text{Sh } x$$

$$\boxed{f(x) = \text{Ch } x \Rightarrow f'(x) = \text{Sh } x}$$

$$h(x) = \text{Th } x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \Rightarrow$$

$$h'(x) = (\text{Th } x)' = \text{(como cociente)} = \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}\right)' =$$

$$= \frac{\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2 - \left(e^{x} - e^{-x}\right)^2}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2} = \text{(desarrollando y simplificando)} = \frac{1}{\left[\frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)\right]^2}$$

$$= \; = \frac{1}{\text{Cosh}^2 x} = \text{Sech}^2 x$$

$\boxed{f(x) = \text{Th } x \Rightarrow f'(x) = \text{Sech}^2 x}$ y, análogamente las restantes funciones hiperbólicas.

Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas:

Con total similitud al ejemplo realizado para la función arco seno, mediante la utilización del teorema de las derivadas de funciones inversas, se determinan las funciones derivadas señaladas.

Con los resultados obtenidos, se completa la Tabla de Derivadas de funciones elementales.

Derivadas de funciones expresadas en forma implícita

Una función dada en forma implícita se puede expresar genéricamente como: F(x,y) = 0 **(*)**, estableciéndose de esa manera una relación entre las variables x e y.

Existe, en esa expresión, como su nombre lo indica, una función f en el sentido conocido, pero que debe llamarse implícita (por estar oculta, no evidenciada) de la forma y = f(x), (explicita, evidente) de manera que se cumple que $(x,y) \in f$.

La expresión explícita de la función y = f(x) es posible que no pueda obtenerse a partir de procedimiento algebraico alguno, pero el concepto importante es la condición que para todo par ordenado (x,y) perteneciente a f, los valores del par, sustituidos en la forma **(*)**, sí la verifican.

Así como de cualquier forma implícita F(x,y) = 0, no puede obtenerse siempre su expresión explícita y = f(x), en cambio, el paso recíproco (de explícita a implícita) es posible en todos los casos, aunque sea en forma trivial, ya que:

De cualquier y = f(x), explícita es obvia la expresión y - f(x) = 0, del tipo F(x,y) = 0, implícita.

Es importante destacar que los términos "implícita" ó "explícita" no caracterizan ni clasifican la función, sino que indican exclusivamente la forma en que ella viene expresada.

La forma implícita definida, lleva en ella, tanto la función y = f(x), como la función x = g(y).

Y, lógicamente son f(x) y g(x) funciones respectivamente inversas.

Para calcular las derivadas de las funciones f y g (aunque no puedan ser explicitadas), se efectúan con las herramientas que da el álgebra de las derivadas, teniendo en cuenta lo concerniente a la composición al derivar respecto de una u otra variable.

El procedimiento general es efectuar ambas derivadas, respecto de x, considerando y la función. También respecto de y, siendo entonces x la función. Se obtendrán así, $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dx}{dy}$ es decir, ambas derivadas, debiendo verificarse, a título de comprobación de lo hecho, que se cumple el teorema para las derivadas de las funciones inversas. La propuesta es: Derivar F(x,y) = 0, respecto de x e y, verificando el teorema. Ejemplo:

Sea $F(x,y) = x.\text{sen } y + y.\cos x = 0$

para la derivada $\frac{dy}{dx}$, es x la variable, e y es la función: y = f(x), con lo que queda:

$\text{sen } y + x.(\cos y).y' + y'.\cos x + y.(-\text{sen } x) = 0$ despejando y' tenemos:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y.\text{sen } x - \text{sen } y}{x.\cos y + \cos x}$$

para la derivada $\frac{dx}{dy}$, es y la variable, y x es la función: x = g(y), y será entonces:

$x'.\text{sen } y + x.\cos y + \cos x + y.(-\text{sen } x).x' = 0$ despejando x' tenemos:

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{-x.\cos y - \text{sen } y}{-y.\text{sen } x + \text{sen } y}$$

Quedan así expresadas ambas funciones derivadas, y se verifica para las mismas el teorema de las derivadas de las funciones inversas.

Se verifica de inmediato que se cumple efectivamente que: $y'_x = \frac{1}{x'_y}$. o $x'_y.y'_x = 1$

Derivadas sucesivas

Así como, a partir de una función f, se ha definido el concepto de función derivada, que se ha designado como f', es lógicamente posible aplicar a esta función así obtenida, nuevamente el proceso de la derivación.

Se obtendrá así, la función derivada de la función f', que se indicará como $(f')'$, o directamente como f''. Resulta inmediato interpretar que esta metodología podrá repetirse sin otra restricción que las condiciones de aplicabilidad del concepto de derivada, resultando con la aplicación reiterada la obtención de las derivadas sucesivas de una función.

El número de veces que se aplique el concepto, dará lugar a la designación correspondiente de derivada primera, segunda, tercera, y así sucesivamente con relación a la función dada.

Es evidente, que la relación de inclusión entre los dominios será en todos los casos:

$$D f \subseteq D f' \subseteq D f'' \subseteq D f^{(3)} \subseteq \ldots D f^{(n)} \subseteq \ldots$$

Según las características de la función original a derivar (llamada a veces derivada cero, es decir, $D f \equiv D f^{(0)}$), se obtendrán resultados de menor, igual o mayor dificultad algebraica en las derivadas sucesivas.

Se trata, cuando sea posible, de expresar la derivada de orden "n" o derivada enésima, a partir de una ley que la obtenga en función del orden de la derivación.

Si se trata de funciones polinómicas, cada derivada que se efectúa disminuye en un grado el polinomio que resulta, con lo que de un polinomio de grado n, se obtiene como resultado una constante para la derivada de orden n, y luego son todas nulas, a partir del grado n+1. Se tiene:

$$f(x) = P_n(x) \rightarrow f^{(n)}(x) = a_n(\text{cte}) \rightarrow f^{(n+1)}(x) = 0$$

Para un polinomio entero, es obvio que el grado de dificultad de las funciones que se van obteniendo al derivar, va decreciendo.

En el caso de una función trigonométrica seno o coseno, las derivadas sucesivas tienen similar característica que la función original, y como se repiten cíclicamente, es posible determinar de inmediato la derivada enésima, ya que es:

$$f(x) = \text{sen } x \;;\; f'(x) = \cos x \;;\; f''(x) = -\text{sen } x \;;\; f^{(3)}(x) = -\cos x$$
$$f^{(4)}(x) = \text{sen } x \;;\; f^{(5)}(x) = \cos x \;;\; f^{(6)}(x) = -\text{sen } x \;;\; \ldots$$

Esta secuencia indefinida nos determina que la derivada de orden n, será siempre:

$f^{(n)}(x) = \text{sen } x$, si n es múltiplo de 4

$f^{(n)}(x) = \cos x$, si n es múltiplo de 4 + 1

$f^{(n)}(x) = -\text{sen } x$, si n es múltiplo de 4 + 2

$f^{(n)}(x) = -\cos x$, si n es múltiplo de 4 + 3

Si se trata de una función como por ejemplo $f(x) = e^{ax}$, se puede obtener la ley general:

$$f(x) = e^{ax}; \quad f'(x) = a.e^{ax}; \quad f''(x) = a^2.e^{ax}; \quad f^{(3)}(x) = a^3.e^{ax} \; ; \dots ; \; f^{(n)}(x) = a^n.e^{ax} \; \dots$$

Finalmente, a partir de otras funciones elementales, como por ejemplo, f(x) = tg x , se van obteniendo derivadas sucesivas cada vez con grado mayor de complicación, y puede llegar a ser prácticamente imposible – o de muy gran dificultad – determinar una expresión general para $f^{(n)}(x)$ en muchos casos.

Como ejemplo simple de esta situación:

$$f(x) = \text{tg } x \; ; \; f'(x) = \sec^2 x \; ; \; f''(x) = 2.\sec^2 x.\text{tg } x \; ; \dots$$

Derivadas de funciones expresadas en forma paramétrica

Si se trata de una función expresada en forma paramétrica, es posible determinar con facilidad su derivada, a partir de ciertas condiciones previas para asegurar la existencia de la misma.

Sea una función f: y = f(x) , dada a través del parámetro t:

$$y = f(x) \begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases} \qquad \text{con } t_0 \le t \le t_1$$

Supongamos además, que las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ admiten derivadas, y que para la función $x = \alpha(t)$ existe su inversa $t = \alpha^{-1}(x)$, y que esta función inversa también sea derivable.

En esas condiciones es posible expresar $y = f(x)$ como una función compuesta de las funciones β y α^{-1}, ya que: $y = \beta(t)$, y como $t = \alpha^{-1}(x) \Rightarrow y = \beta\left[\alpha^{-1}(x)\right]$

Derivando como función compuesta, resulta: $\dfrac{dy}{dx} = \beta'\left[\alpha^{-1}(x)\right] \alpha^{-1\prime}(x)$; como; $t = \alpha^{-1}(x)$,

y por el teorema de funciones derivadas de funciones inversas: $\alpha^{-1\prime}(x) = \dfrac{1}{\alpha'(t)}$, queda,

finalmente: $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)}}$ expresión de la derivada de una función paramétrica

Ejemplo, determinar la derivada de la función cicloide, paramétrica, que se expresa así:

$$F(x,y) = \begin{cases} x = t - \text{sen } t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Se cumple que las funciones x(t) e y(t) son derivables, y también que para x(t) existe función inversa restringiendo dominio, con lo que será:

$$x'(t) = 1 - \cos t \; ; \; y'(t) = \text{sen } t \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen }(t)}{1 - \cos (t)}$$

Derivadas de funciones expresadas en coordenadas polares

Sea una función cualquiera dada en coordenadas polares : $\rho = \rho(\theta)$, para la que expresamos la relación conocida de transformación con las coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \text{ sen } \theta \end{cases}$$

como es ρ = ρ(θ) , las expresiones anteriores adquieren la forma paramétrica para x e y, con una única tercer variable, el parámetro θ , lo que permite conceptualmente expresarlas como:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta = \alpha (\theta) \\ y = \rho \text{ sen } \theta = \beta (\theta) \end{cases}$$

y es inmediato en consecuencia, poder calcular $\frac{dy}{dx}$, con la expresión de la derivada de funciones en forma paramétrica:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[\beta (\theta)]'}{[\alpha (\theta)]'} = \frac{[\rho(\theta) \text{ sen } \theta]'}{[\rho(\theta) \cos \theta]'} = \frac{\rho'(\theta).\text{sen } \theta + \rho(\theta).\cos \theta}{\rho'(\theta).\cos \theta - \rho(\theta).\text{sen } \theta}$$

La interpretación geométrica del valor de estas derivadas así determinadas para las funciones en coordenadas polares, al haber sido utilizadas las formas de transformación, y calculada $\frac{dy}{dx}$, es también la pendiente que forma la recta tangente a la curva en el punto correspondiente con respecto al eje horizontal.

Ejemplo: Calcular $\frac{dy}{dx}$ en función de ρ y de θ y en particular para el punto en que θ = $\frac{\pi}{2}$, de la función ρ = 4 (1 - cos θ).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho'(\theta).\text{sen } \theta + \rho(\theta).\cos \theta}{\rho'(\theta).\cos \theta - \rho(\theta).\text{sen } \theta} = \frac{4(1 + \text{sen } \theta).\text{sen } \theta + 4(1 - \cos \theta).\cos \theta}{4(1 + \text{sen } \theta).\cos \theta - 4(1 - \cos \theta).\text{sen } \theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen } \theta + \text{sen}^2\theta + \cos \theta - \cos^2\theta}{\cos \theta + \text{sen } \theta.\cos \theta - \text{sen } \theta + \text{sen } \theta.\cos \theta}$$, y operando adecuadamente se llega a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen } \theta + \cos \theta - \cos 2\theta}{\cos \theta - \text{sen } \theta + \text{sen } 2\theta}$$, que es la función derivada buscada

Para el valor en θ = $\frac{\pi}{2}$, reemplazando el valor en la expresión anterior, tenemos: $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\frac{\pi}{2}} = -2$

Teoremas sobre las funciones derivables

Así como se desarrollaron teoremas aplicables a las funciones continuas, existen una serie de importantes demostraciones para las funciones derivables.

Teorema sobre la derivada en un extremo relativo

Sea una función f definida en un intervalo cerrado [a,b]. Si la misma presenta un extremo relativo (máximo o mínimo) en un punto c interior al intervalo, o sea para c ∈ (a,b), y existe la derivada de f en el punto c, f '(c), entonces, su valor es cero: f '(c) = 0.

Para demostrarlo suponemos que el extremo es un máximo relativo en el punto c. Por definición de extremo relativo máximo, se verificará:

f(c) es máximo relativo ⇔ ∃ E (c) ⊆ [a,b] / ∀ x ∈ E (c) ⇒ f(x) ≤ f(c) (*)

Si llamamos δ al radio del entorno con centro en c, la expresión (*) se cumplirá para todo x del intervalo (c-δ , c+δ) , donde se verificará que f(x) - f(c) ≤ 0

Planteando la expresión de Φ(t) del cociente de las variaciones para calcular la derivada (existente por hipótesis), deberemos analizar separadamente si x pertenece al semientorno izquierdo o derecho de c.

i) Si c - δ < x < c:

$$\Phi(t) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{\leq 0}{< 0} = \geq 0$$ con lo que si x → c, será siempre: f '(c) ≥ 0 (1)

ii) Si c < x < c + δ:

$$\Phi(t) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{\geq 0}{< 0} = \leq 0$$ con lo que si x → c, será siempre: f '(c) ≤ 0 (2)

Las expresiones (1) y (2) indican que la derivada es positiva o cero en un caso, y negativa o cero en el otro. Como por hipótesis, la derivada existe, el límite por izquierda y derecha es el mismo, y no puede existir otra alternativa que sea f '(c) = 0 , que es la tesis.

La demostración es idéntica si se trata de un mínimo relativo.

Es de destacar, que este teorema es de implicancia unidireccional, al no ser cierta su recíproca: la condición de derivada nula, no asegura la existencia de extremo relativo.

Un contraejemplo que demuestra lo afirmado, es la función y = x^3 , que tiene derivada cero en x = 0, y sin embargo, no existe para f (0) extremo relativo alguno.

Teorema Generalizado del Valor Medio, o de Cauchy, o del Cociente de las Variaciones de dos Funciones

Este teorema no tiene una interpretación geométrica determinada, aunque es de suma importancia, ya que del mismo se deducen otros dos teoremas de trascendencia, a la vez que permite demostrar una aplicación de las derivadas.

El enunciado expresa: sean dos funciones f y g, continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b). Entonces, existe un punto $x_0 \in (a,b)$ para el cual se verifica:

$\left[f(b) - f(a)\right].g'(x_0) = \left[g(b) - g(a)\right].f'(x_0)$ (Tesis) que también puede expresarse como:

$\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ $\quad (g'(x_0) \neq 0)$ Se demuestra con una función auxiliar h:

(*) $h(t) = \left[f(b) - f(a)\right].g(t) - \left[g(b) - g(a)\right].f(t)$ con $(a \le t \le b)$

Esta función resulta ser continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), por ser la misma resultante de operaciones de sumas y productos entre f y g, que lo son por hipótesis. Para la misma, se cumple, además que h(a) = h(b):

$$h(a) = \left[f(b) - f(a)\right].g(a) - \left[g(b) - g(a)\right].f(a) = f(b).g(a) - g(b).f(a)$$
$$h(b) = \left[f(b) - f(a)\right].g(b) - \left[g(b) - g(a)\right].f(b) = -f(a).g(b) + g(a).f(b)$$

El objeto de la demostración es probar que para esta función h, existe en (a,b), por lo menos un punto x_0 donde su derivada es nula, o sea, se busca algún x que cumpla que $h'(x_0) = 0$.

i) Si h es constante, se verifica lo pedido para todo $x \in (a,b)$

ii) Si h no es constante, habrá por lo menos algún punto x donde h(x) será distinto de h(a) que es a su vez igual a h(b), pudiendo ser, ese valor de h(x) mayor o menor que h(a) = h(b):

$$h(x) < h(a) = h(b) \quad \text{o} \quad h(x) > h(a) = h(b)$$

En cualquier caso, considerando el punto x donde de verifique el máximo o el mínimo relativo, por el teorema anterior, existirá la derivada de h (t), y se cumplirá que $h'(x_0) = 0$.

Derivando ahora la expresión (*):

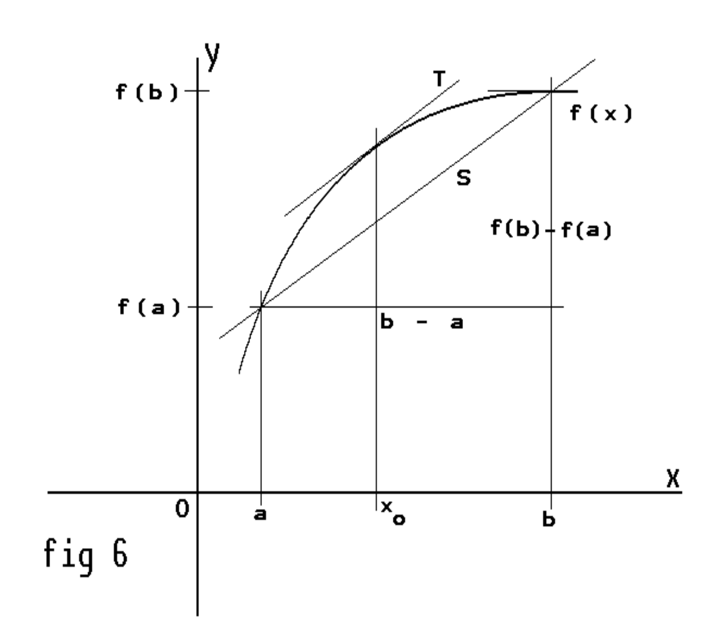
$h'(t) = \left[f(b) - f(a)\right].g'(t) - \left[g(b) - g(a)\right].f'(t)$, y como existe un x_0 tal que $h'(x_0) = 0$

$h'(x_0) = \left[f(b) - f(a)\right].g'(x_0) - \left[g(b) - g(a)\right].f'(x_0) = 0$, lo que verifica que:

$\left[f(b) - f(a)\right].g'(x_0) = \left[g(b) - g(a)\right].f'(x_0)$ que es la tesis.

Teorema del Valor Medio, o de Lagrange, o de las variaciones finitas

Sea una función f [a,b], continua y diferenciable en (a,b), entonces existe por lo menos un punto $x_0 \in (a,b)$ para el cual se verifica:



$f(b) - f(a) = (b - a).f'(x_0)$, o, de la forma:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \qquad (*)$$

La interpretación geométrica del teorema es muy sencilla (fig.6) ya que el primer miembro de la expresión (*) es la tangente trigonométrica o pendiente de la recta S, que es la secante a la curva en los puntos de la gráfica correspondientes a los extremos del intervalo dado [a,b].

El segundo miembro de (*) es el de la tangente trigonométrica o pendiente de la recta T, tangente a la curva en el punto x_0 interior a [a,b].

En resumen, gráficamente el teorema asegura que existe una recta tangente a la curva, que es paralela a la recta secante determinada para los extremos del intervalo.-

La demostración parte del Teorema del Valor Medio Generalizado que dice:

$$\left[f(b) - f(a)\right].g'(x_0) = \left[g(b) - g(a)\right].f'(x_0)$$

Considerando en el enunciado, a la función g como la función identidad, lo que es válido, ya que esta última cumple las condiciones requeridas, continuidad en [a,b] y derivabilidad en (a,b).

Sería: g(x) = x ; g(a) = a ; g(b) = b ; $g'(x_0) = 1$

El reemplazo en la expresión del teorema nos determina inmediatamente la tesis:

$$f(b) - f(a) = (b - a).f'(x_0)$$

La demostración efectuada, nos permite considerar al Teorema de Lagrange como un caso particular del anterior de Cauchy, simplemente particularizando a una de las funciones de éste como la función identidad.

Teorema de las raíces de la derivada, o de Rolle

Sea una función f continua en [a,b] y derivable en (a,b), para la que se cumple que en sus extremos, f(a) = f(b), entonces existe por lo menos un punto x_0 interior a (a,b), para el que se cumple que $f'(x_0) = 0$.

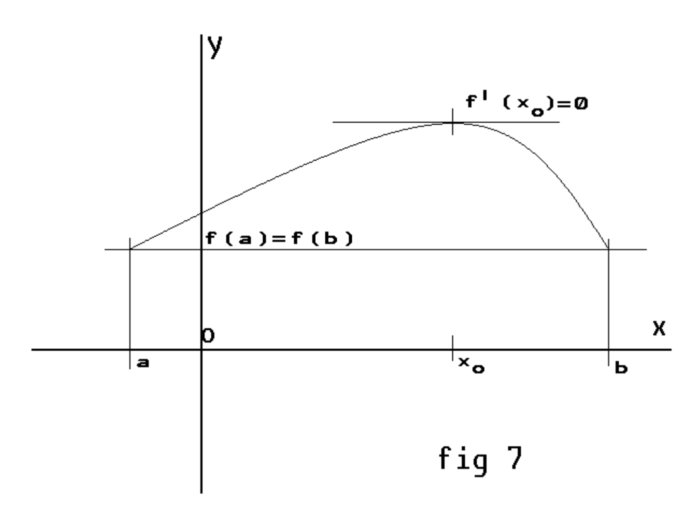


fig 7

Su interpretación geométrica es muy sencilla (figura 7).

Este Teorema de Rolle es a su vez un caso particular del de Lagrange, y su demostración simple parte precisamente de este último.-

La interpretación geométrica, también análoga, indica asimismo el paralelismo por igual pendiente entre las rectas secante S correspondiente a los extremos del intervalo, y la tangente en x_0, T, que en este caso son ambas horizontales

Por el Teorema de Lagrange: $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Como por hipótesis es f(a) = f(b), el numerador de la expresión anterior es cero. Como existe intervalo finito, es b ≠ a, y por ello b - a no es cero, el primer miembro es nulo, y el segundo también, lo que verifica la tesis: $f'(x_0) = 0$

Teoremas sobre crecimiento y decrecimiento de funciones derivables

Son, en realidad, simples corolarios del Teorema de Lagrange, y muchas veces son enunciados directamente como tales.

Sea una función derivable en (a,b), entonces:

si $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f es estrictamente creciente en (a,b)

si $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f es creciente en (a,b)

si $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f es constante en (a,b)

si $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f es decreciente en (a,b)

si $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en (a,b)

Para todas las afirmaciones anteriores, las demostraciones consideran la expresión del Teorema de Lagrange para dos puntos cualesquiera x_1, x_2 ambos pertenecientes a (a,b), de manera que se cumple: $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

El teorema indica que se verifica: $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1).f'(x_0)$ (*) con ($x_1 < x_0 < x_2$)

A partir de la misma, con la simple definición de crecimiento y decrecimiento de una función en un intervalo, quedan verificadas todas las tesis expresadas. A título de ejemplo, la primera de ellas:

Si se cumple que $f'(x) > 0$, como es siempre $x_2 - x_1 > 0$, el producto entre ambos factores (segundo miembro de (*)) es también positivo, por lo que el primero también lo será: $f(x_2) - f(x_1) > 0$, con lo que se verifica la condición de función estrictamente creciente, ya que se consideró inicialmente que: $x_2 > x_1$ lo que determinó el cumplimiento de la condición: $f(x_2) > f(x_1)$.

Idéntico concepto se utiliza para demostración de las restantes.

<u>Definición del diferencial de una función</u>

Utilizamos para la presentación de este importante concepto, una de las expresiones indicadas como forma de definición de la derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (*)$$

Recordando el concepto de función infinitésima en un punto a, lo que verifica $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, para cualquier función, se cumple que: si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, por propiedades de límites es: $\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0$, con lo que: $[f(x) - L]$ <u>es un infinitésimo en a</u>.

Por lo tanto, de la expresión (*), entonces, obtenemos inmediatamente que la función:

$f'(x) - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, es infinitésimo para Δx = 0: o sea $f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Si a esa función, se la llama g (Δx), es entonces g (Δx) infinitésima en 0. Se debe tener en cuenta que lo es con el concepto de derivada, cuando $\Delta x \to 0$, es decir que <u>la variación de la variable tiende a cero</u>. Lo expresamos:

$$g(\Delta x) = f'(x) - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Multiplicando por $\Delta x \neq 0$, en ambos miembros, queda:

$$f'(x).\Delta x - [f(x+\Delta x) - f(x)] = g(\Delta x).\Delta x$$

Lo que indica que la función expresada en el primer miembro, para valores de Δx próximos a cero (variación de la variable próxima a cero), es también próxima a cero, lo que se puede expresar como:

$$f'(x).\Delta x - [f(x+\Delta x) - f(x)] \approx 0 \qquad \text{para } \Delta x \approx 0$$

Con lo que resultan aproximadamente iguales las expresiones que forman el primer miembro de la expresión anterior:

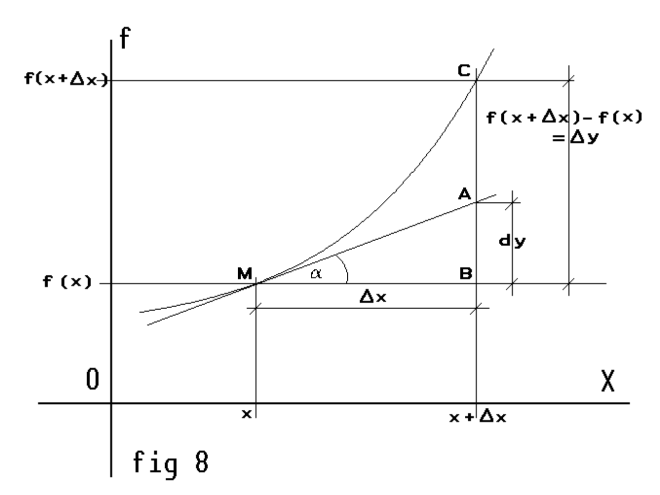
(1) $$f'(x).\Delta x \approx \left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]$$

El segundo miembro de la expresión indica la variación de la función para el correspondiente Δx, por lo que se puede poner:

$$f\left(x+\Delta x\right) - f(x) = \Delta y \qquad (\text{ó } \Delta f)$$

Al producto del primer miembro, $f'(x).\Delta x$ se lo llama diferencial de la función f en el punto x, para Δx, y se lo simboliza con dy ó df.

$$dy = f'(x).\Delta x \quad (\text{ó } df)$$



De su definición surge que la diferencial de una función depende del punto x en que se considere, y del valor de Δx.

La interpretación geométrica del diferencial se aprecia en la figura 8. Allí se ha graficado una función f, y considerado para ella un punto x, y una variación Δx, determinándose la tangente a la curva en el punto M, correspondiente a la abscisa x. Esta recta tangente forma un ángulo α con el eje de las x.

Para el incremento Δx de la variable, es decir, para el punto de abscisa x + Δx, se obtiene el punto C sobre la gráfica. Los puntos B y A son los obtenidos con la horizontal por M, y la intersección con la tangente por el mismo punto.

El segmento BC es la variación de la función para la variación Δx, y es f(x+Δx) - f(x), expresable, según se dijo, como Δy o como Δf.

Por otra parte, como trigonométricamente es AB = tg α.Δx , es también AB = f '(x).Δx, que es precisamente la expresión del diferencial, y constituye su interpretación geométrica.

Por ello, es: AB = dy ; BC = Δy y, nuevamente : Δy ≈ dy

De la expresión (1) surge que $$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x).\Delta x$$

Expresión que permite aproximar el valor de una función en un valor próximo a otro conocido o que pueda calcularse con facilidad.

Lógicamente, el error que puede cometerse en la utilización de la diferencial como aproximación de la exacta variación de la función dependerá de las características de la función en el punto, pero especialmente del valor de Δx.

Diferencial de una función. Expresiones

La diferencial de una función puede expresarse en forma genérica, a partir de la función derivada. Por ejemplo, para la función identidad:

$y = f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ por lo que será: $dy = f'(x).\Delta x$; $dy = 1.\Delta x$; $d(x) = \Delta x$; $\boxed{dx = \Delta x}$

Para la función identidad la diferencial es igual a la variación de la variable, por lo que se utiliza generalmente la expresión dx en lugar de Δx. De esta manera, así queda indicado:

$$\boxed{dy = f'(x).dx}$$

que es la forma corriente de expresarla, y que se utilizará en adelante pero sin perder el concepto con que ha sido definido el diferencial.

Simplemente se expresa dx en lugar de Δx, por lo dicho: Δx es igual al diferencial de la función identidad, que es dx. Ejemplo:

si $f(x) = 3x^2 + x - 6$, será $dy = (6x + 1).\Delta x$, o directamente: $dy = (6x + 1).dx$

Para verificar en un caso el error que puede cometerse al utilizar la aproximación del diferencial en lugar de la variación de la función, calculamos ambos valores en un caso concreto.

Sea $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$, para la que se determinará dx y Δx considerando para ello el punto $x = 2$, con una variación $\Delta x = + 0,1$. Se verá entonces la aproximación entre el valor real y el obtenido con el diferencial para $x = 2,1$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$, obteniendo entonces;

Δf = valor exacto = f (2,1) - f(2) = 16,981 - 15 = 1,981

df = valor aproximado = f '(2).0,1 = 19.0,1 = 1,9

Con lo que: f (2,1) = exacto = 16,981 ; f (2,1) = aproximado = 16,9 Error inferior al 0,5 %.

Algebra de la diferencial

El álgebra de las diferenciales es absolutamente idéntica al álgebra de las derivadas, lo que es lógico a partir de la definición. Así será:

$$y = f + g \Rightarrow dy = df + dg$$
$$y = f - g \Rightarrow dy = df - dg$$

$$y = f\,.\,g \;\Rightarrow\; dy = g.df + f.dg$$

$$y = \frac{f}{g} \;\Rightarrow\; dy = \frac{g.df - f.dg}{g^2} \quad (con\ g \neq 0)$$

$$y = (f \circ g) \;\Rightarrow\; dy = f'[g].dg$$

Aplicaciones de la diferencial

Diferencial de funciones expresadas en forma implícita

El diferencial puede utilizarse como forma conveniente para la derivación de funciones expresadas en forma implícita, aplicando las reglas del álgebra de la diferencial a la expresión a derivar, y luego expresar las respectivas derivadas con notación de Leibnitz:

$$y' = \frac{dy}{dx} \;;\quad x' = \frac{dx}{dy}$$

Ejemplo: Derivar la función expresada implícitamente, aplicando el álgebra de la diferencial:

$$6x^2 + 3xy - y^2x + 16 = 0$$

$$12x\,dx + 3\,dx\,y + 3x\,dy - 2y\,dy\,x - y^2dx = 0$$

$$dx\left(12x + 3y - y^2\right) + dy\,(3x - 2yx) = 0$$

Despejando $y'_x = \frac{dy}{dx}$ y $x'_y = \frac{dx}{dy}$, se tienen las derivadas de las respectivas funciones inversas:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{12x + 3y - y^2}{3x - 2yx} \quad ; \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{3x - 2yx}{12x + 3y - y^2}$$

Lógicamente, el resultado verifica el teorema de las derivadas de funciones inversas.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad ; \quad dy/dx = \frac{1}{dx/dy}$$

Aproximación de funciones

Para la determinación del valor aproximado de una función en un punto próximo a uno conocido, o la variación aproximada de la misma, se utiliza alguna de estas expresiones vistas, obtenidas del concepto de diferencial de una función:

a) $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x).\Delta x$ o b) $\Delta x \approx f'(x).\Delta x$

Resultará adecuada la utilización de una u otra expresión, conforme las características del problema a resolver.

Algunos ejemplos:

i) Calcular el valor aproximado de la $\sqrt[4]{19}$

Es de aplicación a), la primera de las expresiones, siendo en este caso, conocido por exacto más próximo, el valor de $\sqrt[4]{16} = 2$. Consideramos entonces:

$$f(x) = \sqrt[4]{x^3} \quad ; \quad f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \quad ; \quad x = 16 \quad ; \quad \Delta x = +3 \ ; \quad x + \Delta x = 19$$

con lo que resulta, aplicando la expresión a):

$$\sqrt[4]{19} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}.3 = 2 + \frac{3}{32} = 2{,}09375$$

Llegamos al valor aproximado: $\sqrt[4]{19} \approx 2{,}09375$

Siendo, el valor exacto: $\sqrt[4]{19} = 2{,}08780$

} error ε < 0,3 %

ii) Calcular, aproximadamente, la variación de la superficie de una bola de nieve cuyo radio es r = 10 cm, si, al derretirse, para a ser su radio r = 9,8 cm.

Corresponde aquí aplicar la expresión 2) ya que interesa la “variación” de la función, al pedirse disminución de la superficie

La expresión a considerar de la función (sup. de la esfera) es $S = S(r) = 4\pi r^2$, por lo que:

$dS = s'.\Delta r = 8\pi r.\Delta r$; como r = 10, y pasa de 10 a 9,8 cm, Δr es negativo, $\Delta r = -0{,}2$ cm

$$\Delta S \approx dS = 8\pi\,(10 \text{ cm}).(-0{,}2 \text{ cm}) = -16\pi \text{ cm}^2 = -50{,}265482 \text{ cm}^2$$

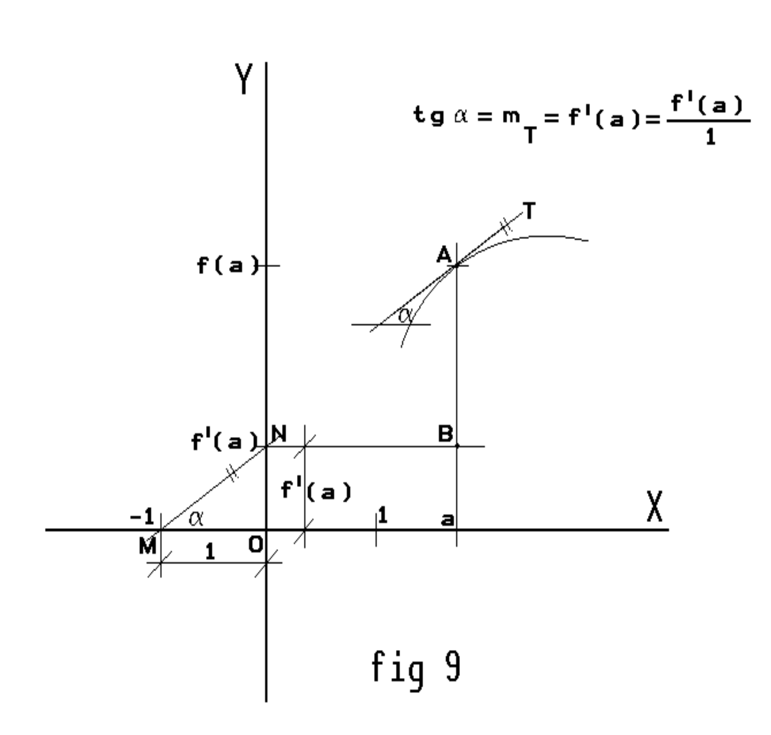
el valor exacto es $\Delta S = 4\pi\,(9{,}8^2 - 10^2) = -49{,}762828 \text{ cm}^2$

siendo en este caso el error ε = 1 %.

Derivación gráfica

La derivación de una función f puede efectuarse a partir de la gráfica de la misma, obteniendo la correspondiente a f '. El procedimiento que se utiliza, simplemente aplica el significado geométrico de la derivada de una función, es decir la pendiente de la recta tangente en el punto.-

La figura 9 presenta la metodología y la justificación de la derivación gráfica:



Sea un punto de abscisa a, para el cual corresponde el punto A cuyas coordenadas son (a,f(a)) sobre la gráfica de f, para el que se dibuja la tangente T a la curva.

Si se toma hacia la izquierda del origen O la unidad de escala de dibujo, "1", se tiene el punto M.

Por ese punto, llamado polo, se traza la paralela a la tangente a la curva hasta cortar al eje de ordenadas en N, la distancia del origen O a N corresponde al valor de la derivada f ' de la función f en el punto a.

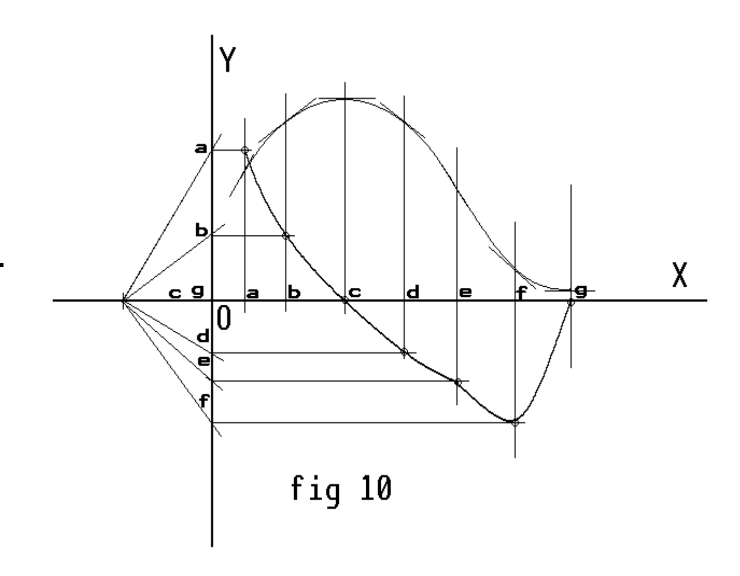
De esta manera, el punto B, de coordenadas (a, f ' (a)), pertenece a la gráfica de f '.

La justificación es inmediata, ya que en el triángulo MON, la tangente de α, es decir, la derivada f '(a), es igual al cociente entre los catetos ON y MO. Por ser MO por construcción la unidad 1, es directamente: f '(a) = ON

El procedimiento anterior ha sido descripto para un punto cualquiera, lo que constituye la determinación gráfica de la derivada en un punto.

Si se trata de obtener la derivación gráfica de una función o de un intervalo del dominio de la misma, se repetirá el procedimiento punto a punto.

Conforme las características de la gráfica de f se deberán tomar la cantidad de puntos necesarios para poder trazar la gráfica de f ' buscada, siendo obtenible una mayor aproximación cuanto mayor sea la cantidad y proximidad de los puntos.



Como ejemplo, en la figura 10 se realiza la graficación de un tramo de una función con el procedimiento descripto antes. En puntos de tangente horizontal, como "c" y "g" de la figura, se obtiene, como corresponde, ordenada cero para f '(c) y f '(g).

Aplicaciones de la Derivada

Se han desarrollado ya algunos temas que constituyen algunas aplicaciones de la derivada, y que corresponde recordar aquí.

Aproximación de funciones

El concepto de la diferencial de una función permite utilizar una aplicación concreta, como es obtener valores aproximados de funciones a partir de otros próximos conocidos, y determinar las variaciones igualmente aproximadas de las mismas para pequeñas variaciones de la variable respectiva. Las expresiones que se utilizan para ello son las ya vistas:

$$f\left(x+\Delta x\right) \approx f\left(x\right) + f'\left(x\right).\Delta x \qquad \text{o:} \qquad \Delta f \approx f'\left(x\right).\Delta x$$

Crecimiento y decrecimiento de funciones:

A través del signo de la derivada primera de una función en un intervalo, con aplicaciones sencillas (o corolarios) del Teorema de Lagrange, se determina el comportamiento de la función en un intervalo en relación a su crecimiento o decrecimiento.

Recordamos también las formas ya analizadas que indican las distintas posibilidades y que constituyen otra aplicación de la derivada:

si $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f es estrictamente creciente en (a,b)
si $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f es creciente en (a,b)
si $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f es constante en (a,b)
si $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f es decreciente en (a,b)
si $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en (a,b)

Extremos relativos de una función (máximos y mínimos relativos)

Para la determinación de extremos relativos en una función, es fundamental establecer en primer lugar, cuales son las condiciones que deben constatarse para que se tenga la factibilidad de existencia de un extremo relativo, conforme el comportamiento de la función en el posible extremo, aunque con el cumplimiento de las mismas no se asegure que el mismo exista, (son condiciones necesarias, no suficientes).

Luego, donde se cumplen las condiciones necesarias, se determinarán los criterios a verificar que aseguren la existencia del extremo y su clasificación en máximo o mínimo, (serán condiciones suficientes).

Condiciones necesarias para la existencia de extremos relativos

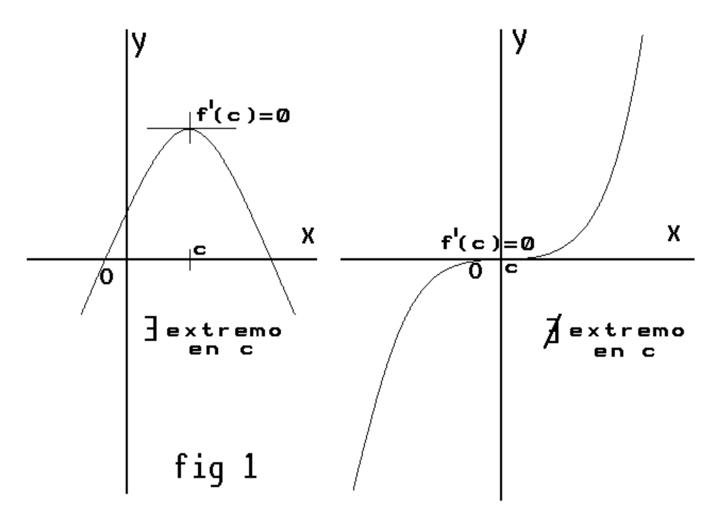
Se debe analizar la condición del posible extremo f(c), y para ello, las alternativas son: i) que la función en c sea derivable (por ende continua), ii) que en c sea continua y no derivable, o iii) que sea discontinua en c. Siempre se considerará la definición de extremo relativo.

Si la función es derivable

El teorema visto en este tema requiere que se cumpla la nulidad de la derivada para el punto c (donde se encuentra el posible extremo), lo que equivale a $f'(c) = 0$.

El enunciado del teorema dice: si f tiene extremo relativo en f(c), y $\exists f'(c) \Rightarrow f'(c) = 0$

La expresión del teorema ya demostrado resulta una condición necesaria para la existencia de extremo relativo en funciones derivables, pero ella no es suficiente, ya que un simple contraejemplo lo verifica:

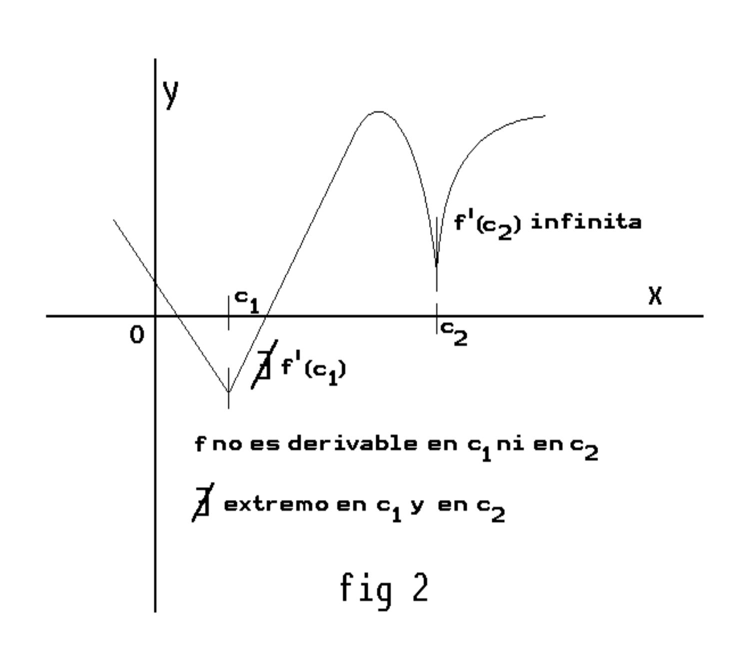


Para la función $f(x) = x^3$. Vemos que tiene derivada nula en x = 0, es decir $f'(0) = 0$, pero en ese punto no existe extremo relativo.

La figura 1 muestra como la condición de nulidad $f'(c) = 0$ es efectivamente necesaria cuando hay extremo, pero también se ve en el contraejemplo que no es suficiente.

Si la función es continua pero no derivable

En ejemplos sencillos como ser: $y = |x|$ en el punto x = 0, se verifica que la función es continua, no existe derivada y hay extremo relativo. Lo mismo ocurre en $y = \left|\sqrt[3]{x}\right|$ para x = 0 donde hay derivada infinita y también extremo relativo.



En gráfica de la figura 2, se ve que, existe extremo en c_1 y c_2, donde la función es continua pero no derivable; en ambos puntos hay extremo relativo, y se verifica la no existencia de derivada, ya sea por derivadas laterales distintas, o bien por ser derivada infinita.

La no existencia de derivada, indica que estamos nuevamente en presencia de una condición necesaria. Se interpreta claramente en la figura de la izquierda.

La afirmación anterior es igualmente unidireccional, ya que con contraejemplos se demuestra inmediatamente que la condición no es suficiente.

Ahora vemos en la figura 3 una hipotética función, para la cual se observan dos puntos donde en uno de ellos no existe derivada por ser laterales distintas, y en el otro se tiene derivada infinita.

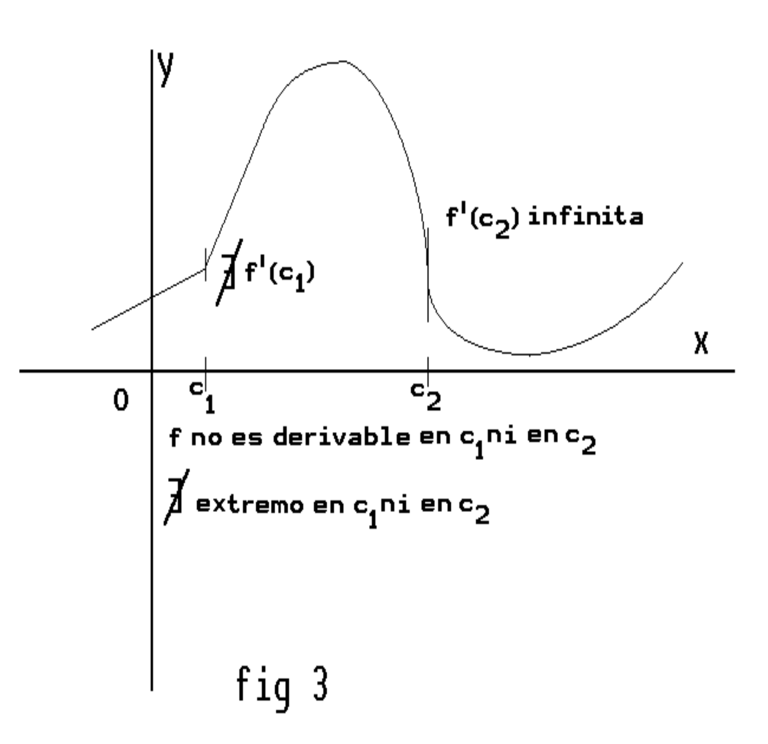


fig 3

En ninguno de los casos estamos en presencia de extremo relativo, por lo que queda acreditado el carácter no suficiente de la condición.

Como resumen, se llega a que en una función continua y no derivable, si hay extremo relativo en c, entonces se verifica que f'(c) no existe o es infinita.

Si la función es discontinua

El razonamiento es similar para el caso de un extremo relativo que se presenta en un punto en que la función no es continua.

Es preciso recordar que en la definición de extremo relativo para el punto c, f(c) es un valor que toma la función, por ende definida en c.

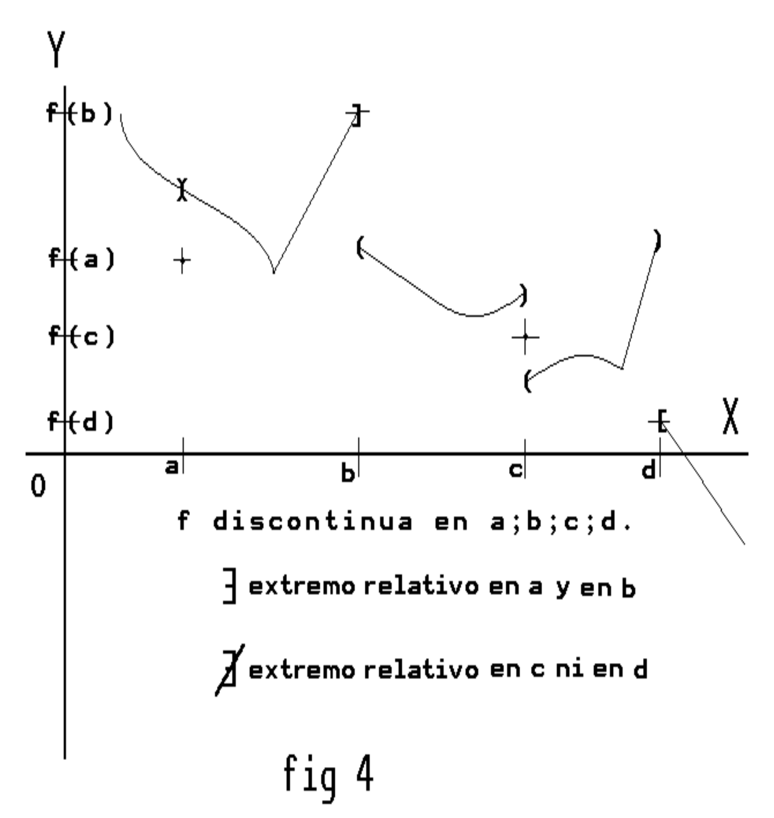


fig 4

La figura 4 muestra otra gráfica arbitraria en la que se indican cuatro puntos donde la función, estando definida en los cuatro puntos, no es continua en ninguno de ellos.

Para el punto a, la gráfica muestra un mínimo relativo de valor f(a), mientras que para el punto b, estamos en presencia de un máximo relativo, de valor f(b).

Es elemental verificar lo afirmado a partir de la definición de extremo relativo: en ambos casos, existen entornos de centros en a y en b donde se verifican las condiciones exigidas ($f(x) \geq f(a)$; $f(x) \leq f(b)$).

Para este último caso, de funciones discontinuas, tampoco la discontinuidad es condición suficiente: la misma gráfica muestra, que para los puntos c y d, no se cumple para f(c) ni para f(d) la condición de extremo relativo.

Puntos críticos

Son llamados puntos críticos aquellos del dominio de la función, para los cuales se verifica alguna condición necesaria (de las tres que indicamos como posibles) para la existencia de extremos relativos.

La determinación de todos los puntos críticos en una función constituye el necesario primer paso para la determinación de los extremos relativos.

Lo analizado hasta ahora, para los casos de derivabilidad, continuidad sin derivabilidad y discontinuidad determina las llamadas condiciones necesarias para la existencia de extremos relativos.

En resumen: Es "a" un punto critico de la función f siendo $a \in Df$, es decir que puede existir en x = a extremo relativo, de valor f(a), si ocurre alguna de estas **condiciones necesarias**:

- f(x) es discontinua en x = a
- $\nexists$ f '(a) (sea por derivadas laterales distintas o por derivada infinita)
- $\exists$ f '(a) = 0

A partir de haber determinado los puntos críticos o posibles extremos, queda claro por todo lo analizado que no pueden existir extremos relativos en otros puntos que no sean los ya encontrados puntos críticos, por lo que la determinación y análisis de las condiciones suficientes estará acotada a su aplicación en los que hayan sido así determinados.

Condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos - Criterios para la clasificación de los mismos

Precisamente ahora se razonarán los criterios para asegurar o descartar en el punto crítico la existencia del extremo, y además clasificarlos en máximo o mínimo relativo para el caso de que el mismo exista.

También se deberán establecer los casos en que es de aplicación cada uno, según las condiciones de la función en el punto crítico (derivable, continua solamente, discontinua).

Criterio según la definición de extremo relativo

Es obvio que este criterio es de aplicación en todos los casos, sea cuando, siendo x = c punto crítico, en f(c) la función es derivable, o continua no derivable o discontinua.

Pero precisamente este criterio no utiliza para su aplicación el concepto de derivada, por lo que carece de interés en este tema, y se aplicará exclusivamente en el caso en que la función fuera discontinua en el punto, ya que entonces, es el único que puede utilizarse.

Criterio del cambio de signo de la derivada primera

Sea a, un punto crítico de una función f que es derivable en un entorno del mismo, y continua (no necesariamente derivable) en el punto a; si se verifica que el signo de la derivada primera de la función cambia al considerar valores de la variable inmediatamente anteriores y posteriores, entonces, la función presenta un extremo en x = a.

Este teorema lo enunciamos sin demostración, quedando la misma como propuesta.

Si el signo de la derivada cambia de positivo a negativo, el extremo es un máximo relativo.

Si el signo de la derivada cambia de negativo a positivo, el extremo es un mínimo relativo.

Sea el intervalo [m,n] donde $a \in (m,n)$ es el punto crítico, y consideramos: $x_1 < a$, y $x_2 > a$, para verificar los signos de f' antes y después de a:

m x_1 a x_2 n
————[——│———│————│—————]————

Si sgn $(x_1) \neq$ sgn $(x_2) \Rightarrow \exists$ extremo relativo en f(a) (afirma la existencia de extremo relativo)

Si sgn $(x_1) > 0$ y sgn $(x_2) < 0$, f(a) es un máximo relativo

Si sgn $(x_1) < 0$ y sgn $(x_2) > 0$, f(a) es un mínimo relativo

La demostración del teorema es inmediata si f es además derivable en a, a partir del Teorema de Lagrange, e igualmente se deduce con facilidad si f es continua no derivable en a, a partir de la definición de extremo.

Este criterio no puede aplicarse, por las condiciones expuestas en el teorema, si f es discontinua en a.

En cambio, puede utilizarse el mismo cuando f es continua en a, punto crítico aunque no se verifique allí la condición de derivabilidad, con tal de que la misma se cumpla en un entorno.

Criterio del signo de la derivada segunda También se enuncia este criterio, como teorema:

Sea f derivable en el punto crítico a, y sea la derivada primera también derivable en x = a, lo que implica que existe derivada segunda para ese punto: $\exists f''(a)$. Entonces: si el valor de la derivada segunda es distinto de cero: $f''(a) \neq 0$, hay extremo relativo para x = a (afirma la existencia del extremo). Además (para calificarlo):

Si el signo : $f''(a) > 0$, se trata de un mínimo relativo

Si el signo : $f''(a) < 0$, se trata de un máximo relativo

A partir de las condiciones establecidas en la hipótesis del teorema enunciado, cuya demostración queda como ejercitación, este criterio es de aplicación exclusivamente si la función f es derivable en x = a.

Además, se exige la existencia de $f''(a)$, y debe ser $f''(a) \neq 0$.

Formas de procedimiento

La forma concreta de analizar los extremos relativos de una función, consiste como paso necesario, determinar la totalidad de los puntos críticos, en su dominio. En primer lugar, determinar donde la función es discontinua, y luego, a través de la derivada, establecer los valores del dominio para los cuales ésta se anula o no existe. Así se verifica donde se cumple “alguna” o algunas de las condiciones necesarias

Debe tenerse en cuenta que deben determinarse perfectamente la totalidad de los puntos críticos, para poder recién entonces asegurar con certeza que en los restantes valores del dominio no existen extremos relativos.

Se aplicará el criterio de determinación de extremos por definición, exclusivamente en los puntos de discontinuidad, pudiendo aplicarse el de la segunda derivada únicamente donde hay derivabilidad. El del cambio de signo de la derivada primera puede usarse indistintamente donde la función es derivable, o si es solamente continua en el punto crítico.

Como ejemplo, sea determinar los extremos relativos y clasificarlos para la función:

$y = f(x) = (x-2).\sqrt[3]{x^2}$, cuyo dominio son los Reales: D f = R.

Derivando, y luego de simplificar la función resultante, queda: $y' = \dfrac{5x-4}{3.\sqrt[3]{x}}$

Determinación de los puntos críticos:

i) Por condición de discontinuidad: no hay, ya que f(x) es continua en R.

ii) Por condición de derivada nula: $f'(x)=0$, determina un punto crítico: $x_1 = 4/5$

iii) Por condición de no existencia de derivada: $f'(x)$ infinita, determina otro PC: $x_2 = 0$

En resumen, los puntos críticos son únicamente dos: x = 0 ; x = 4/5 .

Análisis para x = 0:

Se puede aplicar únicamente el criterio del cambio de signo de la derivada primera, ya que la función no es derivable en el punto. Se analiza para f' su signo en valor de x menor y mayor que cero (o “en cero por izquierda y en cero por derecha”)

$$\left.\begin{array}{l} \text{signo de } f'(x) \text{ en } 0^{-}: > 0 \\ \\ \text{signo de } f'(x) \text{ en } 0^{+}: < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

∃ extremo (ya que hay cambio de signo de f ') y es máximo (ya que ese cambio es de positivo a negativo en el signo de f ')

Análisis para x = 4/5:

Se pueden aplicar aquí los dos criterios, por ser derivable f en el punto. Analizamos con el cambio de signo de la derivada primera

signo de f '(x) en $4/5^-$: < 0 ⎫ ∃ extremo (ya que hay cambio de signo de f ')
⎬ ⇒ y es mínimo (ya que ese cambio es de negativo
signo de f '(x) en $4/5^+$: > 0 ⎭ a positivo en el signo de f ')

Lógicamente está ya queda en x = 4/5 determinado el tipo de extremo, pero a efectos de ejercitación lo comprobamos con el criterio de la derivada segunda.

Para ello, derivando y', y simplificando, se tiene: $y'' = \dfrac{10x + 4}{9x\sqrt[3]{x}}$

El criterio requiere simplemente determinar el signo de y '' en el punto.

Resulta: signo f ''(4/5) > 0 ⇒ confirma (obvio) que ∃ extremo y es mínimo.

En general es más cómodo y práctico el criterio del cambio de signo de la primera derivada, ya que es de aplicación siempre (salvo discontinuidad), y se evita el cálculo de la derivada segunda, que puede, según la función, ser más trabajoso.

Problemas de aplicación de máximos y mínimos

El concepto matemático visto para la determinación de extremos tiene directa y concreta utilización para resolver problemas reales y corrientes, sobre los que se ejemplificará a continuación.

Ante la expresión de un problema real determinado, tendrá invariablemente que interpretarse en forma matemática para poder plantearlo, resolverlo y dar la respuesta al mismo. Si se estableciera una secuencia común a los diversos problemas, ella consistiría en lo siguiente:

i) Interpretar el problema, en la forma o lenguaje corriente en que el mismo venga presentado o planteado.-

ii) Expresarlo trasformando ese lenguaje a una forma o expresión matemática.-

iii) Utilizando todos los datos y elementos que el problema ofrezca, lograr la función que se debe resolver, (aquella para la que se debe determinar su máximo o mínimo), expresada en una sola variable.-

iv) Resolver el problema matemático de determinar los extremos de esta función.

v) Desechar las soluciones que aparezcan como respuesta matemática pero que sean contradictorias o imposibles para el problema real.

vi) Expresar la solución en el mismo lenguaje corriente en que fue planteado el problema.

La dificultad se presenta al transformar el lenguaje corriente al matemático, por la escasa o nula ejercitación que se hace de esa necesaria práctica cotidiana. Los problemas profesionales de situaciones diarias no vienen planteados matemáticamente. Se usa la herramienta matemática para resolverlos.

Cuando las características del planteo lo permiten, es muy conveniente plantear un gráfico que ayude a la visualización del problema, y a obtener su planteo adecuado.

La diversidad de problemas que pueden resolverse con la determinación de extremos es muy amplia, por lo que se exponen varios ejemplos en lo que sigue.

Ejemplo 1) Hallar dos números de manera que el producto entre ellos sea máximo, sabiendo que la suma de los mismos es 36. Hallar el resultado del producto que con ellos se obtiene.

Inicialmente llamamos a los números a determinar como "x" e "y", mientras que la función cuyo extremo se debe determinar es el producto entre ambos números. De esta manera el problema en lenguaje matemático plantearía la expresión a "maximizar", como:

(producto) $P = x.y$

La función tiene dos variables, lo que no permite determinar los extremos en la forma conocida. Para expresarla como función de una variable, se debe tener en cuenta el otro dato que expresa el enunciado del problema, que nos da la suma de los números: $x + y = 24$.

Simplemente despejando cualquiera de ellos en función del otro, (por ejemplo: $y = 24 - x$), y reemplazando en la expresión anterior del producto, queda la función en una sola variable:

(producto) $P(x) = x.(24 - x) = 24\,x - x^2$

Sobre esta función P(x)se aplica el procedimiento matemático de la determinación de los extremos relativos. Por ser ella continua y derivable en R, solamente existen puntos críticos donde la derivada sea nula.

$P'(x) = 24 - 2\,x$, con lo que $P'(x) = 0 \Rightarrow x = 12$ (P.Crítico)

Con $P''(x) = -2$, es obvio que $P''(12) < 0$, por lo que es máximo

La respuesta matemática indica que en $x = 12$ existe un máximo relativo de la función P(x).

La respuesta al problema en los términos con que fue planteado el mismo requiere calcular los dos números como se pide: $x = 12$; $y = 24 - 12 = 12$.

En definitiva:

a) Los números son 12 y 12

b) El producto es 12.12 = 144

Ejemplo 2) Determinar las dimensiones de un cartel rectangular, en el que se debe escribir un texto publicitario que ocupa 450 cm^2, también de forma de rectángulo, requiriendo que deben quedar libres, sin escritura, 6 cm en ambos márgenes laterales, y 3 cm en sus bordes superior e inferior, con la menor superficie plana posible. Indicar finalmente: ancho, alto y superficie obtenida.

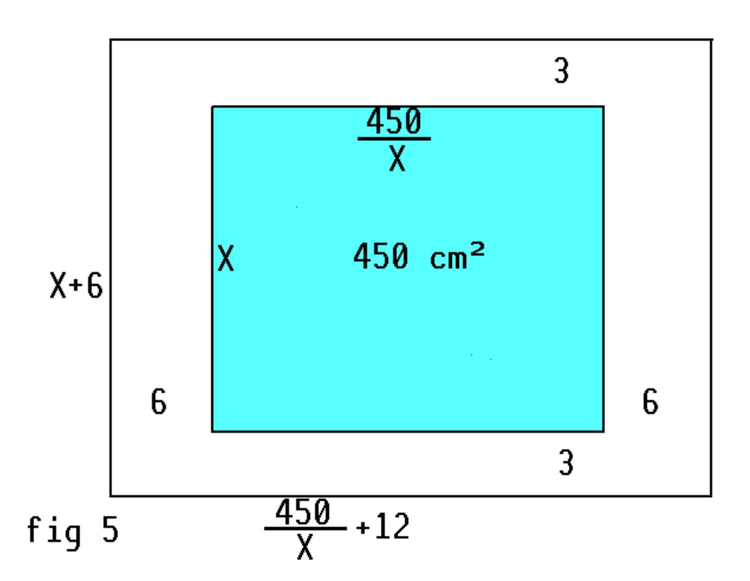


fig 5

Este planteo necesita una ayuda gráfica para la visualización del problema expresado, y que a su vez permita la expresión matemática.

El diseño esquemático es el de la figura 5.

En el gráfico se han indicado el rectángulo que conforma el cartel cuyas dimensiones mínimas se busca determinar, y el correspondiente al texto a escribir, con los correspondientes márgenes en blanco dados por el requerimiento del problema.

En la designación de la variable se eligió arbitrariamente la altura del texto escrito: x (cm).

Podría haberse elegido el ancho del texto, o la altura, o el ancho de la hoja. Lo importante es que una vez determinada la elección, los restantes elementos del problema pasarán a expresarse conforme la misma.

Como el área del texto impreso, dato del problema, es de 450 cm^2, el ancho será $\frac{450}{x}$ (cm).

A partir de las dimensiones alto y ancho del texto impreso, con la simple suma de los márgenes requeridos de espacio libre en los laterales, superior e inferior, se tiene el ancho y alto de la cartel a utilizar expresada en la variable x.

En el gráfico se indica: ancho: $\frac{450}{x} + 12$ (cm); alto: $x + 6$ (cm).

Con estos elementos, que interpretan gráfica y matemáticamente el problema a resolver, se puede expresar la función para determinar sus extremos.

La función es el área del cartel, que se debe expresar como corresponde, en una sola variable.

$A(x) = (\frac{450}{x} + 12).(x + 6) = 450 + \frac{2700}{x} + 12\,x + 72$ Dominio $A(x) = R - \{0\}$

$A(x) = 522 + \frac{2700}{x} + 12\,x$ Esta función es continua en su dominio, por lo que analizamos solamente su función derivada: $A'(x) = -\frac{2700}{x^2} + 12$. Igualamos $A'(x) = 0$, lo que dice que:

$x^2 = 225$ con lo que matemáticamente hay dos puntos críticos $x = \pm 15$

Para determinar si son extremos relativos y de que tipo, aplicando el criterio del signo de la derivada segunda, nos indica: $A''(x) = \frac{5400}{x^3}$, con lo que debemos verificar su signo para cada PC, y resulta: $A''(+15) > 0$ es mínimo relativo ; $A''(-15) < 0$ es máximo relativo.

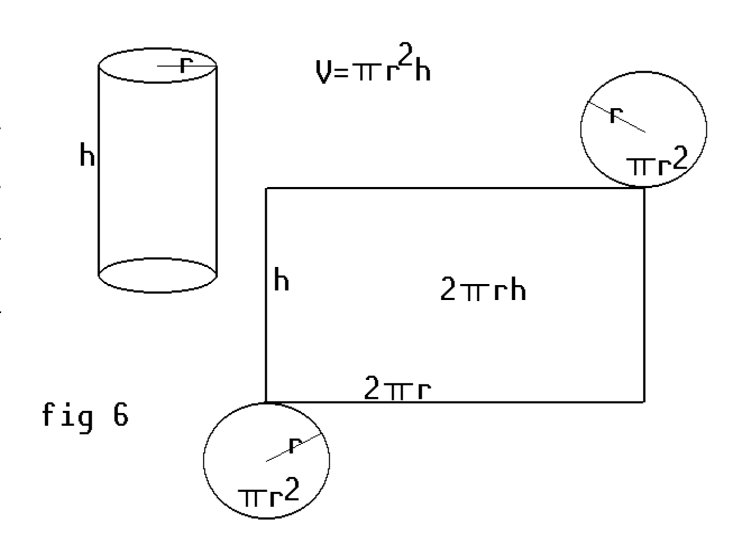
Las expresadas son las <u>soluciones matemáticas</u> al problema de hallar los extremos relativos, pero es fundamental <u>desechar</u> la o las que sean <u>ajenas al problema real a resolver</u>.

Es elemental aquí eliminar la solución negativa, - 15, que no puede corresponder a una dimensión distancia. El otro valor positivo, + 15, (única solución real), reemplazada en la expresión correspondiente, da la respuesta al problema. Además es respuesta lógica: para x = + 15 hay un mínimo, que es el objetivo buscado: la menor superficie a utilizar. La respuesta final en el lenguaje del planteo, es:

Ancho: $\frac{450}{15} + 12 = 42$ cm ; Alto: 15 + 6 = 21 cm ;   Área Cartel: 882 cm^3

Ejemplo 3)

Determinar la relación entre las dimensiones del radio y la altura que determinan el menor costo del material a utilizar para encerrar un volumen V, en un cilindro con tapa, sabiendo que el valor por centímetro cuadrado del material de la tapa y el fondo, es n veces el del material de las paredes laterales. No se tendrá en cuenta el costo de mano de obra.



En el gráfico de la figura 6, simplemente se indica el cilindro, con radio r y altura h, al que se ha desarrollado su superficie total, formada por la lateral 2πrh, y las de su base y tapa de πr^2 cada una.

La función cuyo extremo (mínimo) se desea determinar, es la correspondiente al costo del material, que, por los datos del problema, es superior n veces el de tapa y fondo respecto de las paredes del cilindro.

Por ello, la función del costo debe incrementar con el factor "n" (en n veces) el área de la base y del fondo.

Teniendo en cuenta que el elemento buscado es la función costo, la interpretación matemática del problema planteado queda de esta manera:

(costo) $C = n\, 2\, \pi\, r^2 + 2\, \pi\, r\, h$, (*), pero que está expresada aún en dos variables: r , h

El valor de n, relación de mayor costo del material entre las partes del envase con forma de cilindro es dato del problema, y por ende constante conocida.

También es dato inicial, el volumen V que se desea envasar, y que precisamente permite eliminar una de las variables (h o r), para tener la función costo expresada en una sola de ellas.

Siendo $V = \pi\ r^2\ h$, elegimos una en función de la otra. Por ejemplo, despejando h en función de r, queda: $h = \dfrac{V}{\pi.r^2}$, y reemplazada en (*) expresa el costo en variable r: $C(r) = 2\ n\ \pi\ r^2 + \dfrac{2\ V}{r}$ con D(c) = R - {0}

La función C es continua en su dominio, por lo que los puntos críticos se obtendrán a partir de la expresión de su función derivada.

$C\ '(r) = 4\ n\ \pi\ r - \dfrac{2\ V}{r^2}$, que con la condición C '(r) = 0 resulta, luego de simplificar, un único punto crítico: $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\ n\ \pi}}$, para el cual, la derivada segunda de x: $C\ ''\ (r) = 4\ n\ \pi + \dfrac{2\ V}{r^3}$ es de signo positivo, con lo que se trata de un mínimo relativo, que es precisamente lo buscado (menor costo total de material).

Reemplazando ese valor de r en la expresión de h, resulta: $h = \dfrac{V}{\pi\ \sqrt[3]{\left(\dfrac{V}{2\ n\ \pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{4\ n^2 V}{\pi}}$

Estos valores de h y de r son los que, en función del volumen de que se trate, V, determinan las dimensiones más económicas del material del envase cilíndrico. El valor de n, es también dato, de la relación de costos expresada en el enunciado, y precisamente su relación de mayor o menor costo dará distintas relaciones entre h y r.

El resultado que se pide es precisamente la relación entre ambos valores de h y r, lo que resulta: $\dfrac{h}{r} = 2\ n$ o $h = 2\ n\ r$ que es un resultado de por sí interesante: si el costo del fondo y tapa y de los laterales fuera el mismo, es decir n = 1, el envase más económico sería aquel en el que la altura fuera igual al diámetro del mismo.

Esto indica que la relación entre la altura y el radio del cilindro no depende del volumen, sino solamente de la relación n entre los costos del material entre las paredes laterales y tapa y fondo.

Concavidad

Se dice que una curva es cóncava hacia arriba, o que tiene concavidad positiva, en un punto A de la misma, correspondiente al valor a de la variable, si existe un entorno de a, para el cual los valores de la función son mayores a los de la recta tangente en el punto A de la curva. Figura 7

Análogamente, una curva es <u>cóncava hacia abajo</u>, o que tiene <u>concavidad negativa</u>, en un punto A de la misma, correspondiente al valor a de la variable, si existe un entorno de a, para el cual los valores de la función son menores a los de la recta tangente en el punto A de la curva.

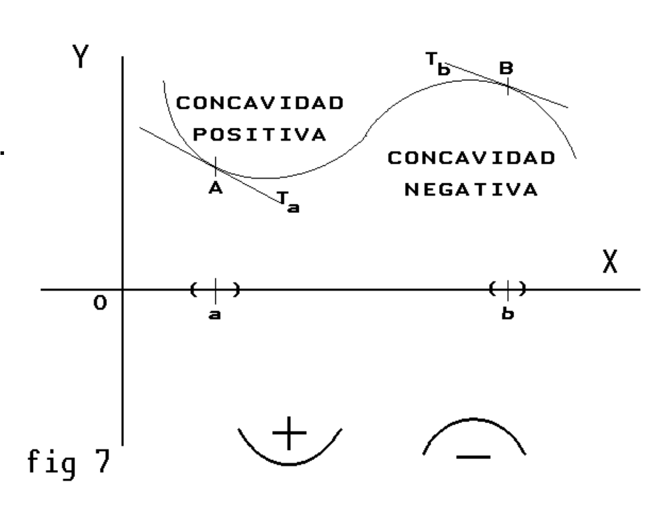


fig 7

Se extienden los conceptos de concavidad en un punto a los de concavidad en un intervalo, si la definición se verifica en todos los puntos del intervalo.

Se enuncian como <u>teoremas</u> de muy fácil demostración las siguientes relaciones entre los signos de la derivada segunda de una función, y la concavidad de la gráfica de la misma:

Si la <u>segunda derivada</u> de una función f <u>es negativa</u> en todos los puntos de un intervalo (a,b), entonces la gráfica de la función tiene concavidad positiva, o sea <u>es cóncava hacia arriba</u> en ese intervalo.

Si la <u>segunda derivada</u> de una función f <u>es positiva</u> en todos los puntos de un intervalo (a,b), entonces la gráfica de la función tiene concavidad negativa, o sea <u>es cóncava hacia abajo</u> en ese intervalo.

$f''(x) < 0$ en (a,b) $\Rightarrow$ la curva f(x) es cóncava positiva en (a,b)
$f''(x) > 0$ en (a,b) $\Rightarrow$ la curva f(x) es cóncava negativa en (a,b)

<u>Punto de inflexión</u>

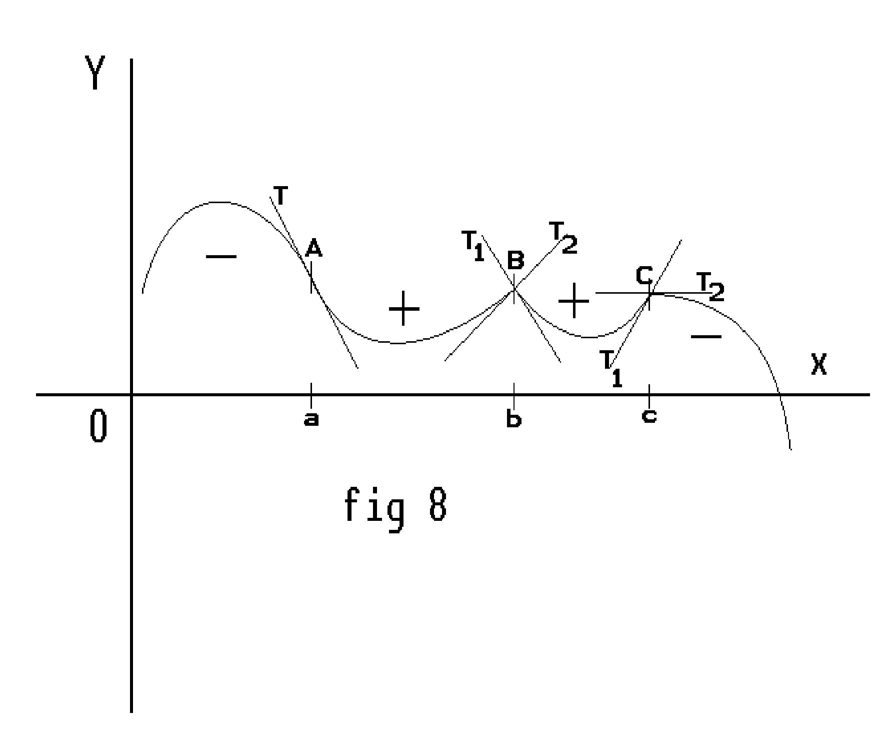


fig 8

El punto perteneciente a una curva continua en que se produce <u>el cambio de curvatura</u> de la misma, se llama <u>punto de inflexión.</u> Figura 8

Es importante tener en cuenta que así como en los extremos relativos la función está definida, también para el punto de inflexión se requiere que el valor pertenezca al dominio, al haberse definido como perteneciente a la curva.

En el punto de inflexión, por estar definido precisamente donde hay cambio de curvatura, no tiene curvatura de ningún signo.

Si en ese punto existe tangente, habrá un entorno donde, por un lado la función toma valores mayores que la tangente y por el otro semientorno ocurre lo opuesto.

Condiciones necesarias para existencia de punto de inflexión

Las mismas son inmediatas, a partir de la definición de punto de inflexión.

La misma exige continuidad de la curva en el punto, por lo que no hay posibles puntos de inflexión en las discontinuidades que pudiera tener la gráfica de la función.

A partir de la relación de la concavidad con el signo de la derivada segunda, y de la definición a partir del cambio de concavidad, el tema se reduce a distinguir si la derivada segunda existe o no en el punto.

Si existe derivada segunda en el punto:

Si la función es derivable, y existe punto de inflexión en f(c) de la curva, entonces la condición necesaria es que $f''(c) = 0$.

No es condición suficiente, con un simple contraejemplo: en la parábola de cuarto grado, función $f(x) = x^4$ para $x = 0$, se verifica que es $f''(0) = 0$, y no existe allí punto de inflexión, sino un mínimo relativo.

La figura 8 muestra en el punto a, un punto de inflexión en que la tangente T (única en el punto) está por debajo de la curva en un semientorno de a y por encima en el otro semientorno.

Si no existe derivada segunda en el punto:

En la misma figura se muestran dos puntos b y c, para los cuales, al no existir derivada primera (derivadas laterales distintas), no existe derivada segunda en ellos.

Vemos que en C, se produce cambio de curvatura en el punto, por lo que C es punto de inflexión. Se concluye que la no existencia de derivada segunda es condición necesaria.

El punto B, donde no se produce cambio de curvatura no es punto de inflexión, por lo que con este contraejemplo también se verifica que la no existencia de derivada segunda no es condición suficiente para existencia de punto de inflexión.

En resumen, las **condiciones necesarias** para la existencia de posible punto de inflexión es el cumplimiento de alguna de las condiciones siguientes:

- $\nexists\ f''(a)$

- $\exists\ f''(a) = 0$

Condición suficiente para la existencia de punto de inflexión.

Una vez determinados los posibles puntos de inflexión, la condición suficiente es simplemente verificar el cumplimiento de la definición de punto de inflexión, determinando el signo de la derivada segunda antes y después del punto en estudio.

Obviamente:

Si hay cambio de signo, hay punto de inflexión.
Si no hay cambio de signo, no hay cambio de inflexión.

Ejemplo de todo lo visto al respecto: Sea la función $f(x) = e^{-x^2}$, para la que se desea analizar sus extremos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento y de concavidad

Es necesario determinar la primera y segunda derivada de la misma:

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{-x^2}.(-2x) \ = \ -2x.e^{-x^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = e^{-x^2}.(-2x).(-2x) \ + \ e^{-x^2}.(-2) \ = \ (4x^2-2).e^{-x^2}$$

La función dada y sus dos primeras derivadas son continuas en su dominio R. También las derivadas primera y segunda, tienen dominio R.

Puntos críticos: $f'(x) = 0$ determina $x = 0$

Signo $f'(0^{-}) > 0$; Signo $f'(0^{+}) < 0 \Rightarrow$ Hay máximo relativo en $x = 0$

Intervalos de Crecimiento: (según signo de f'(x))

Creciente en el intervalo $(-\infty,0)$;

Decreciente en el intervalo $(0,+\infty)$

Posibles puntos de inflexión: $f''(x) = 0$ determina dos valores: $x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Signo $f''\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-} > 0$; Signo $f''\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{+} < 0 \Rightarrow$ Hay punto de inflexión en $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Signo $f''\left(+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-} < 0$; Signo $f''\left(+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{+} > 0 \Rightarrow$ Hay punto de inflexión en $+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Intervalos de Concavidad: (según signo de $f''(x)$)

Concavidad Positiva en los intervalos $(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ y $(+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$

Concavidad Negativa en el intervalo $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2})$

Esquema general de estudio de una función y realización de su gráfico aproximado

La aplicación de todo lo desarrollado hasta ahora sobre las características notables de una función, constituye el estudio completo de la misma, que culmina en el trazado de la gráfica aproximada a partir de los elementos de que se dispone al cabo de ese análisis.-

El seguimiento ordenado de los datos a obtener comprende el análisis y determinación de lo siguiente:

1) Dominio e Imagen.
2) Valores donde la función se anula, o "ceros" de f.
3) Paridad.
4) Asíntotas lineales.
5) Puntos críticos.
6) Determinación de máximos y mínimos relativos.
7) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
8) Posibles puntos de inflexión.
9) Determinación de puntos de inflexión.
10) Intervalos de concavidad positiva y negativa.
11) Cuadro de signos de f, f' y f".
12) Gráfica de la función.

Para el desarrollo de un ejemplo interesante, se efectuará el análisis completo de la función:

$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$ y desarrollamos para la misma, la secuencia de pasos propuestos

1) Dominio e imagen: D f = R ; If = R

2) "Ceros" de la función

f (x) = 0 $\Rightarrow$ $2x^2 - x^3 = 0$ $\Rightarrow$ $x^2 (2 - x) = 0$, con lo que f se anula para $x_1 = 0$ y para $x_2 = 2$

3) Paridad

$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$; $f(-x) = \sqrt[3]{2x^2 + x^3}$; $-f(-x) = -\sqrt[3]{2x^2 + x^3}$

Como vemos, fácilmente: f (x) $\neq$ f (-x) $\Rightarrow$ no es par, y como: f(x) $\neq$ -f (-x) $\Rightarrow$ no es impar

4) Asíntotas lineales

Verticales: $\nexists$ a / $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ $\Rightarrow$ no hay asíntotas verticales

Oblicuas:

i) Pendiente m: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x.\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1}}{x} =$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = -1$ m = - 1

ii) Ordenada n: $n = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x\right]$

$= \lim_{x\to+\infty} \left[x\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + x\right] = \lim_{x\to+\infty} x.\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1}{\frac{1}{x}}$

y, sustituyendo: $z = \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} \Rightarrow z^3 = \frac{2}{x} - 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(1 + z^3\right) \Rightarrow z \to -1$

queda: $= \lim_{z\to -1} 2\frac{1 + z}{1 + z^3} = \lim_{z\to -1} \frac{2}{1 - z + z^2} = \frac{2}{3}$ $n = \mathbf{\frac{2}{3}}$

Los valores de m y n son válidos para ± ∞ , con lo que resulta:

La recta $y = -x + \frac{2}{3}$ Es asíntota oblicua izquierda y asíntota oblicua derecha

5) Puntos críticos

f (x) es continua en su dominio R, por lo que no hay puntos críticos desde la condición de discontinuidad, por lo que se podrán obtener entonces de la función derivada

$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}\left(2x^2 - x^3\right)^{-\frac{2}{3}}.\left(4x - 3x^2\right) = \frac{x\left(4 - 3x\right)}{3.\sqrt[3]{\left(2x^2 - x^3\right)^2}}$

$= \frac{x\left(4 - 3x\right)}{3.\sqrt[3]{x^4\left(2 - x\right)^2}} = \frac{x\left(4 - 3x\right)}{3.\sqrt[3]{x^4\left(2 - x\right)^2}} = \frac{x\left(4 - 3x\right)}{3.x\sqrt[3]{x\left(2 - x\right)^2}} = f'(x)$ y de esta expresión final de la derivada de la función buscamos los puntos críticos (PC). Vemos así que:

∄ f '(0) (es infinita), por lo que x = 0 Es punto crítico

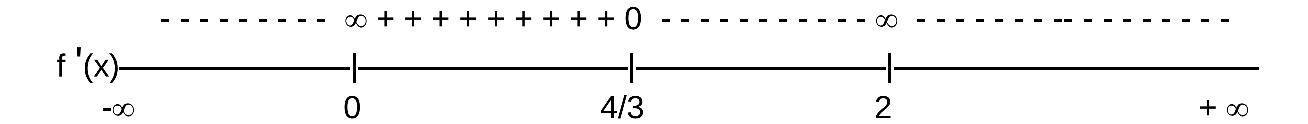
∄ f '(2) (es infinita), por lo que x = 2 Es punto crítico

para la condición f '(x) = 0 ⇒ x = 4/3 Es punto crítico

Los valores que toma f en los puntos críticos, son: f (0) = 0 ; f (4/3) ≈ 1,06 ; f(2) = 0

6) Determinación de los máximos y mínimos relativos

Utilizamos el criterio de la derivada primera, con el análisis de los signos de la misma en R



En el punto crítico x = 0 f ' cambia de signo de - a + por lo que HAY mínimo relativo
En el punto crítico x = 4/3 f ' cambia de signo de + a - por lo que HAY máximo relativo
En el punto crítico x = 2 f ' NO cambia de signo por lo que NO HAY extremo relativo

7) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Son de determinación inmediata con los signos determinados para f'(x).

f es creciente en el intervalo (0,4/3)
f es decreciente en los intervalos (-∞,0) EN (4/3,2) Y EN (2,+ ∞)

8) Posibles puntos de inflexión

Se obtendrán a partir de la derivada segunda, que calculamos partiendo de f'(x) , simplificando en ella por x ≠ 0, válido, ya que f'(0) no existe.

$$f'(x) = \frac{(4 - 3x)}{3.\sqrt[3]{x\,(2 - x)^2}}$$ derivando como cociente obtendremos la segunda derivada de f

$$f''(x) = \frac{-3.3.\sqrt[3]{x\,(2 - x)^2} - (4 - 3x).3.\frac{1}{3}\left[x\,(2 - x)^2\right]^{-\frac{2}{3}}\left[(2 - x)^2 - 2x.(2-x)\right]}{9.\sqrt[3]{x\,(2 - x)^2}.\sqrt[3]{x\,(2 - x)^2}}$$ y luego

de numerosas operaciones algebraicas, y de varias pacientes simplificaciones… se llega a:

$$f''(x) = -\frac{8}{9.\sqrt[3]{x^4}.\sqrt[3]{(2 - x)^5}}$$ expresión final de la derivada segunda, de la que buscamos los posibles puntos de inflexión

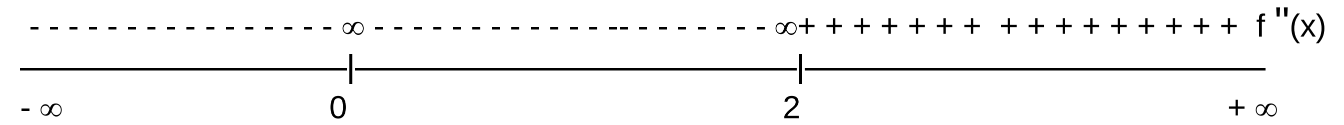
$\nexists$ a / f ''(a) = 0 , por lo que no hay posibles puntos de inflexión de la condición de derivada nula, al no tener valor de x para el que se anulara la derivada segunda.

$\nexists$ f '' (0) (es infinita) por lo que x = 0 Es posible punto de inflexión

$\nexists$ f '' (2) (es infinita) por lo que x = 2 Es posible punto de inflexión

9) Determinación de los puntos de inflexión

Se determinan los signos de la derivada segunda en R antes y después de los valores donde hay posible punto de inflexión



En x = 0 f '' no cambia de signo por lo que no hay punto de inflexión

En x = 2 f '' cambia de signo por lo que hay punto de inflexión

10) Intervalos de concavidad positiva y negativa   Surgen directamente del cuadro de signos de f''.

f Tiene concavidad positiva en el intervalo (2,+∞)

f Tiene concavidad negativa en los intervalos (-∞,0) Y (0,2)

11) Cuadro de signos de f. f' y f''

Durante las determinaciones que se van realizando, se puede construir el cuadro de signos y valores importantes de la función que permitirán graficar la misma con buena aproximación.

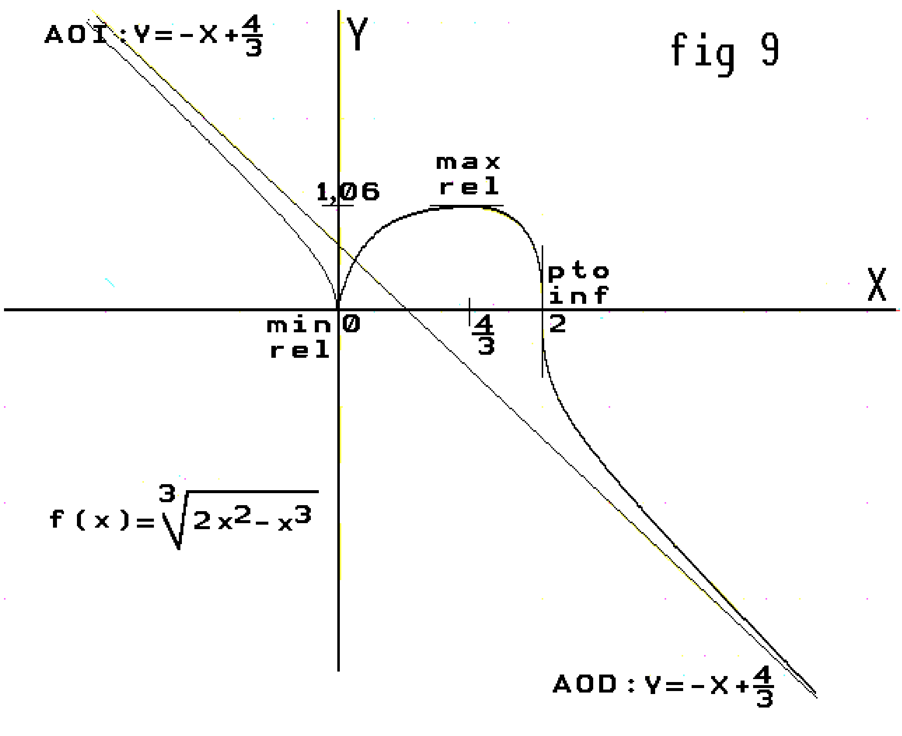
x	- ∞ 0 4/3 2 + ∞
f	+ + + + + + + 0 + + + + + ≈ 1,06+ + + + + 0 - - - - - - - - - -
f'	- - - - - - - - - ∞ + + + + + + +0 - - - - - - - -∞ - - - - - - - - - - -
f''	- - - - - - - - - ∞ - - - - - - - - - ∞+ + + + + + + + + + + + + + +

12) Gráfica de la función

La misma es trazada con facilidad, con el apoyo del cuadro de signos y la ubicación de algunos puntos determinados, como ser los "ceros", y los extremos relativos.

Debe observarse si hay paridad o imparidad (en este ejemplo no) que indican posibles simetrías de la gráfica. Las asíntotas lineales constituyen otro elemento de apoyo fundamental.

El trazado es conveniente hacerlo por tramos, considerándolos de manera que no cambien en cada uno los signos de la función y sus derivadas.



Para cada tramo, con los respectivos signos, se puede ubicar fácilmente la gráfica de la misma, sobre o debajo del eje x, (signo de f), ver su crecimiento en el tramo (signo de f '), y su concavidad (signo de f '').

Regla de L'Hôpital

Una de las importantes aplicaciones de la derivada la constituye la Regla de L'Hôpital, que permite resolver derivando adecuadamente casos de indeterminación de límites, simplificando de esa manera el tema.

La determinación de la misma, se obtiene a partir del Teorema Generalizado del Valor Medio de Cauchy, cuya expresión es:

$$\left[f(b) - f(a)\right].g'(\xi) = \left[g(b) - g(a)\right].f'(\xi) \qquad \text{con } a < \xi < b$$

Siendo f y g continuas en [a,b], y derivables en (a,b).

El Teorema de L'Hôpital enuncia que si para las funciones f y g en que se cumplen las condiciones de Cauchy y por ende su teorema, y se verifica que es f(a) = g(a) = 0, entonces:

Si existe el límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, existe también $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, y será: $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}}$

Para la demostración se considera un x interior al intervalo (a,b), de manera que sea aplicable Cauchy, con lo que se verifica:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \qquad \text{con } a < \xi < x$$

Como se supuso f(a) = g(a) = 0, lo anterior queda:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \qquad \text{con } a < \xi < x$$

La expresión es válida para cualquier x entre a y b, lo que determina que se puede considerar la misma para cuando x tiende a a, es decir, plantear el límite en ambos miembros. En ese caso, por ser válido que siempre el teorema se cumple para algún ξ entre a y x, como $a < \xi < x$, ocurre lógicamente que si $x \to a$, también $\xi \to a$.

Ello permite expresar que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Esta última expresión de la triple igualdad, expresada en variable ξ, es válida para cualquier variable, y en particular para x, lo que permite finalmente expresar:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

con f, g, funciones infinitésimos en x = a

El primer y último miembro constituyen la tesis del Teorema, y es la forma corriente de expresión de la Regla de L'Hôpital.

La expresión es válida aún cuando f (x) y/o g (x) no están definidas en x = a, pero con tal de que existan el o los límites respectivos en a: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y/o $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ya que pueden ser redefinidas asignando el valor 0 a f(a) y/o g(a), obteniéndose así entonces la condición de continuidad requerida para Cauchy.

Es posible demostrar también que la expresión de la Regla de L'Hôpital es válida también cuando las funciones f y g son infinitos en x = a, es decir $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

También se cumple entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ con f, g, funciones infinitas en x = a

Se extiende asimismo, la validez la Regla de L'Hôpital para los casos de límite para valores infinitos de la variable, cuando $x \to \pm\infty$, y se verifica que f(x) y g(x), sean ambos infinitésimos o ambos con límite infinito.

La aplicación de la Regla de L'Hôpital, en resumen, permite resolver directamente las indeterminaciones del límite en los casos de cociente de infinitésimos o de infinitos, que se presenten, tanto para límites calculados para puntos de acumulación finitos como para valores infinitos de la variable.

Algunos ejemplos muy sencillos de aplicación de la regla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\text{sen } x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } x + \cos x - 1}{\text{sen}^2 x - 1} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \text{sen } x}{2 \text{ sen } x.\cos x} = \infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

En el último ejemplo, la aplicación de la Regla no resolvió la indeterminación inmediatamente, ya que la expresión obtenida, resultó también un cociente de infinitos. Simplemente debe reiterarse el método hasta que se obtenga un resultado no indeterminado.

Un error común es no advertir que se ha salvado la indeterminación, y continuar aplicando mecánicamente la Regla, lo que desde ya no es válido y son erróneos los resultados.

Todas las otras formas de indeterminación ya vistas, requieren la transformación a las formas $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ como paso previo ineludible para la aplicación recién entonces, de la Regla de L'Hôpital.

Sea un ejemplo de indeterminación producto entre infinitésimo e infinito:

$$\lim_{x\to 0^+} x^3.\ln x \;=\; (\text{transformando a } \frac{\infty}{\infty}) \;=\; \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \;=\; \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} \;=\; \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^3}{3} \;=\; 0$$

Otro error común es aplicar directamente la Regla en la indeterminación del producto en la expresión original del límite, sin transformar previamente como en este ejemplo, lo que también lleva a obtener resultados totalmente erróneos.

Fórmulas y Polinomios de Taylor y de Mac Laurin

Introducción:

Resulta de mucha utilidad obtener para una función cualquiera, su aproximación con una expresión polinómica elegida adecuadamente, teniendo en cuenta la mayor facilidad de operación y cálculo en general que puede obtenerse con una función polinomio en lugar de una otra cualquiera más complicada.

Lo importante al trabajar con el polinomio que se obtenga en reemplazo de la función original, es determinar el error máximo que se puede cometer en el intervalo de utilización de esa aproximación.

En términos generales, el concepto expresado, nos indica que la utilización de un polinomio p(x) como aproximación de otra función f(x) determinará para cada punto x de la variable un error R(x) que será la diferencia entre el valor aproximado del p(x) considerado y el exacto de la f(x), lo que se puede expresar:

$R(x) = f(x) - p(x)$, con lo que:

$f(x) = p(x) + R(x)$, de manera que el uso de:

$f(x) \approx p(x)$ tendrá sentido práctico si se conoce el error máximo que se comete.

Este tema a desarrollar requiere el concepto previo de Polinomio de Taylor, que se pasa a desarrollar, enunciando, sin demostración, que:

Si una función f tiene n derivadas sucesivas finitas en un punto c de sus dominio, existe, y es único, el polinomio de grado n, $p_n(x)$, cuyas derivadas sucesivas coinciden con las derivadas de la función f en el punto c.

Polinomio de Taylor

Sea $p_n(x)$ o simplemente p (x), una función polinómica de grado n con los coeficientes reales A_0, A_1, A_2, ... A_n:

$$P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n$$

Si c es un número real cualquiera, se puede expresar el polinomio p (x) en potencias de (x-c), en el que aparecerán otros coeficientes reales a_0, a_1, a_2, … a_n , con lo que la expresión será de la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + ... + a_n(x-c)^n \quad (*)$$

En lo que sigue se expresarán los nuevos coeficientes de las potencias de (x-c) en función del valor del polinomio en c y de las sucesivas derivadas del mismo en ese punto.

Derivando hasta el orden "n" la expresión (*) de p(x), queda:

$$p'(x) = a_1 + 2\,a_2(x-c) + 3\,a_3(x-c)^2 + ... + n\,a_n(x-c)^{n-1}$$
$$p''(x) = 2\,a_2 + 3.2\,a_3(x-c) + ... + n\,(n-1)\,a_n\,(x-c)^{n-2}$$
$$p^{(3)}(x) = 3!\,a_3 + ... + n\,(n-1)\,(n-2)\,a_n\,(x-c)^{n-3}$$
. . . .
$$p^{(n)}(x) = n!\,a_n$$

Expresiones válidas para todo x, por lo que en particular para x = c:

$$p(c) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = p(c)$$
$$p'(c) = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = p'(c)$$
$$p''(c) = a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{p''(c)}{2!}$$
$$p^{(3)}(c) = a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{p^{(3)}(c)}{3!}$$
. . . .
$$p^{(n)}(c) = a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{p^{(n)}(c)}{n!}$$

y, reemplazando estas expresiones de los a_i en la anterior (*), queda:

$$p(x) = p(c) + p'(c)(x-c) + \frac{p''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{p^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \ldots + \frac{p^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Expresión que constituye el Polinomio de Taylor del polinomio p(x), para el punto x = c , lo que equivale a decir que p(x) o $p_n(x)$ es desarrollado en potencias de (x-c).

Expresado con la simbología de sumatoria, y llamando $p^{(0)}(c)$ a la función p(c), sin derivar, y recordando que 0! = 1, se resume lo anterior como:

$$\boxed{p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(c).(x-c)^i}{i!}}$$

Polinomio de Mac Laurin

Si en particular, se considera el punto c = 0 , con lo que resulta la expresión desarrollada en potencias de x, se obtiene el llamado Polinomio de Mac Laurin:

$$p(x) = p(0) + p'(0)\,x + \frac{p''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{p^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

Que es expresable igualmente como sumatoria, de la forma:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(0).(x)^i}{i!}$$

Si se trata de un polinomio p (x) cualquiera, su expresión como Polinomio de Taylor o Polinomio de Mac Laurin se obtiene en forma exacta, ya que como se analizó en el tema de derivadas sucesivas, la derivada de orden n+1 es siempre nula.

En consecuencia, la expresión como se ha desarrollado, de grado n es exactamente equivalente al polinomio dado, sin error.

El interés del tema es precisamente cuando se trata de una función cualquiera, no polinómica, para la que se trata de buscar la aproximación con el respectivo Polinomio de Taylor o de Mac Laurin.

Cuanto mayor sea el grado del polinomio con que se busca la aproximación a la función dada, precisamente será menor el error cometido, tema que se desarrolla con el nombre de Fórmula de Taylor (si c es cualquiera) o Fórmula de Mac Laurin (si c es cero).

Fórmulas de Taylor y de Mac Laurin

Sea ahora una función f cualquiera, (no como antes particularmente un polinomio) derivable de orden n, con derivadas sucesivas finitas en todo punto de un intervalo I = (a,b), y sea c un punto de dicho intervalo.

La función f y sus derivadas sucesivas cuya existencia se tiene como hipótesis, se expresarán como: $f(c), f'(c), f''(c), f^{(3)}(c), \ldots, f^{(n)}(c)$

Si con ellas como coeficientes reales, se forma un polinomio de grado n en potencias de (x-c), se obtiene la expresión:

$$p(x) = f(c) + f'(c)\,(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}\,(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}\,(x-c)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,(x-c)^n$$

que es el Polinomio de Taylor, de grado n, para la función f en el punto c, desarrollado en potencias de (x-c).

Para este polinomio, se verifica que las n derivadas sucesivas del polinomio así obtenido, coinciden en el punto c, con las respectivas derivadas de igual orden de la función f, además del mismo valor de la función y del polinomio en c.

$p(c) = f(c)$
$p'(c) = f'(c)$
$p''(c) = f''(c)$
$p^{(3)}(c) = f^{(3)}(c)$
. . . .
$p^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$

En la figura 10 se indican, para un punto c, una parte de las gráficas de una función cualquiera f(x), y las de Polinomios de Taylor de grados 0, 1 y 2 para dicha función en el punto c, es decir, en potencias de (x-c).

El objeto de esa interpretación gráfica es confirmar dos aspectos expresados antes: i) que para el punto c coinciden los valores de la función y el polinomio, como así sus n derivadas sucesivas, y ii) que para un punto x distinto de c, la aproximación entre la función y el Polinomio de Taylor es mayor a medida que aumenta el grado del mismo.

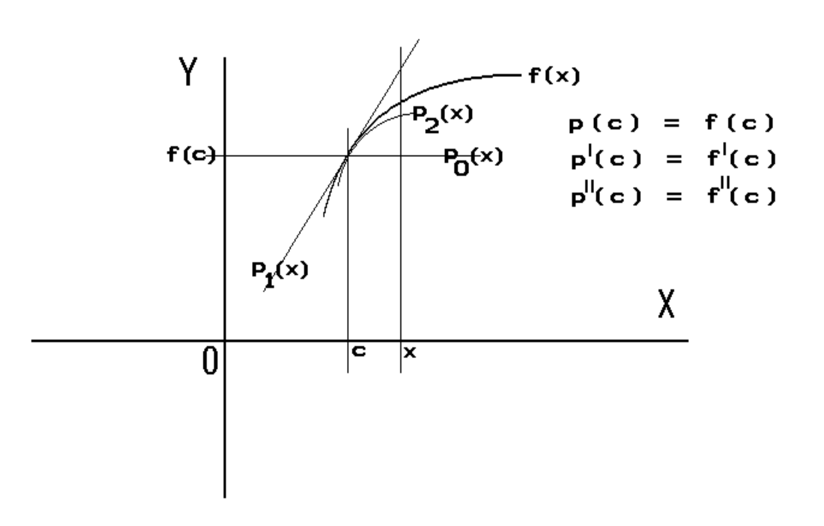


fig 10

Según lo definido antes, si el punto que se considera para el desarrollo es el valor c = 0, se tiene el Polinomio de Mac Laurin de grado n para una función f.

$$p(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

Si bien en el caso de funciones polinómicas es idéntico el valor de las misma al de los respectivos polinomios de grado n (siendo n el grado del polinomio), es lógico entender que en general no ocurre lo mismo para una función cualquiera.

En ese caso, el valor de la función con relación al polinomio de grado n, verifica la expresión:

$f(x) = p_n(n) + R_n(x)$, siendo $R_n(x)$ la diferencia llamada: Resto de Taylor (o de Mac Laurin)

Ese resto es la diferencia entre la función y el polinomio, error que se comete al utilizar este último como aproximación de la función f.

Teorema del Resto de Taylor o del Resto de Mac Laurin

Enunciamos, sin demostración, este importante teorema, que permite determinar la expresión del resto o error que se comete al aproximar funciones en general, a Polinomios de Taylor o de Mac Laurin.

Sea f una función que admite derivadas finitas de orden n + 1 en todos los puntos de un intervalo I = (a,b) , y sean, c un punto de dicho intervalo, y, x un punto cualquiera de un entorno de c perteneciente al mismo intervalo I.

Entonces, existe un punto ξ comprendido entre c y x: si x > c, (mayor que c) será c < ξ < x , y si x < c, (menor que c) será x < ξ < c , de manera que se verifica:

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \quad \text{con } \xi \text{ entre c y x, y con } x \in \text{ al intervalo (a,b)}$$

Siendo :

- f (x), la función considerada cuya aproximación se busca
- p_n (x), el Polinomio de Taylor de grado n de la función f para el punto c.
- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$, el Resto de Taylor, o error que se comete al considerar el polinomio p(x) de grado n como el valor aproximado de la función f(x)

La expresión para c = 0 , que corresponde a Mac Laurin, es idéntica:

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x)^{n+1}, \quad \text{con } \xi \text{ entre 0 y x, y con } x \in \text{ al intervalo (a,b)}$$

Si se completa la expresión, con la función desarrollada con el polinomio respectivo, y expresado el valor del resto es de la forma:

$$f(x) = f(c) + f'(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

Mientras que, como sumatoria, resulta:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(c).(x-c)^i}{i!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \text{ con } \xi \text{ entre c y x, y con } x \in \text{ al intervalo (a,b)}$$

que son las llamadas Fórmulas de Taylor con resto, y análogamente, para c = 0:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n + R_n(x)$$, o como:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0).(x)^i}{i!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x)^{n+1}, \text{ con } \xi \text{ entre c y x, y con } x \in \text{ al intervalo (a,b)}$$

que son las llamadas Fórmulas de Mac Laurin con resto

El esquema muestra la interpretación del intervalo I, y los puntos c, x, ξ

```
     a                c      ξ     x   b
———(—————————————|—————|————|——)—————    I = (a,b)
```

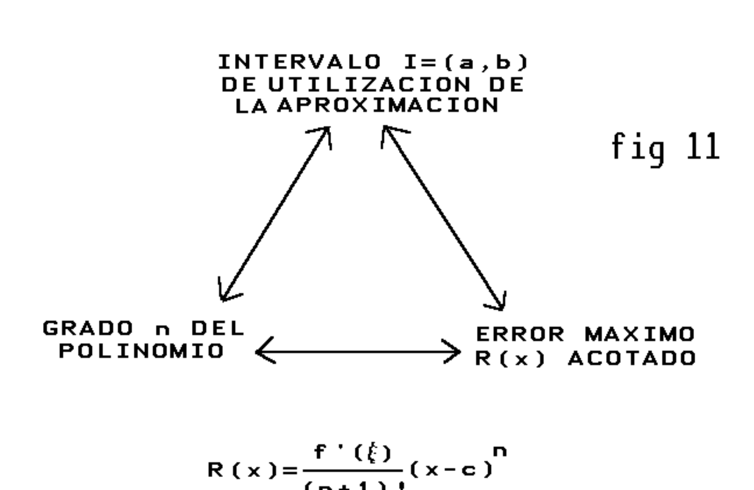
Aproximación de Funciones mediante las Fórmulas de Taylor y Mac Laurin

Ya se ha expresado que el objetivo final de la utilización de los conceptos presentados, es el uso de funciones polinómicas como aproximación válida de otras funciones, a partir de las condiciones de existencia de las derivadas de estas últimas.

El error que se comete está dado por la expresión del Resto de Taylor, que estará vinculado directamente con los otros elementos variables en cada caso, que son el grado n del polinomio respectivo, y del intervalo I para el que se utilice la aproximación.

Desde ya que no se conoce exactamente el error, al no poder establecerse la ubicación del punto ξ pero que lo que puede determinarse, es el valor máximo de ese error a partir de la expresión del Resto.

La expresión del Resto: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-c)^{n+1}$, depende de los valores de x y de ξ , a partir de lo cual se puede determinar el valor máximo que puede tomar, teniendo en cuenta los "x" y "ξ" que resulten más desfavorables dentro del intervalo I de aplicación de la aproximación.



El esquema de la figura 11 representa las posibilidades y variantes a establecer, según las necesidades y características de cada problema.

i) A partir del grado del polinomio y del intervalo de utilización, se determina el error máximo a cometer.

ii) Definido el intervalo y el error máximo que admite el problema, se obtiene el grado n que debe tener el polinomio para no excederlo.

iii) Con un polinomio de grado dado, y con el error máximo admisible, se obtiene el intervalo de posible utilización.

Ejemplos de aplicación

Sea la función $y = e^x$. Para ella, se pide:

i) Determinar el Polinomio de Taylor para el punto c = 1 (potencias de x-1), de grado n = 5.

ii) Determinar el error máximo que se comete, al utilizarlo como aproximación de la función en el intervalo I = (0,2).

iii) Indicar cual debe ser el grado del polinomio si el error máximo admisible en ese intervalo es 0,000001.

i) La función e^x presenta derivadas sucesivas finitas sin restricción, por lo que se podrán calcular hasta el orden que sea necesario. La forma genérica, del Polinomio de Taylor, para grado n = 5 en el punto c = 1, es:

$$p(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots + \frac{f^{(5)}(1)}{n!}(x-1)^5$$

Para su expresión concreta, se debe derivar $y = e^x$ hasta el orden cinco, y expresar el valor de cada derivada para el punto c = 1.

$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f(1) = e^1 = e$

$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(1) = e^1 = e$

$f''(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f''(1) = e^1 = e$

$f^{(3)}(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = e^1 = e$

$f^{(4)}(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = e^1 = e$

$f^{(5)}(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(1) = e^1 = e$

Con lo que, el reemplazo correspondiente expresa el polinomio pedido en este punto

$$p_5(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \frac{e}{4!}(x-1)^4 + \frac{e}{5!}(x-1)^5 = e\sum_{i=0}^{5}\frac{(x-1)^i}{i!}$$

ii) El error máximo se obtiene a partir de la expresión de R(x), para la que interviene la derivada n+1, en este caso, de orden 6.

Será en este caso: $R_6(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x-1)^6$, y como $f^{(6)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(6)}(\xi) = e^{\xi}$,

y queda para el resto: $R_6(x) = \frac{e^{\xi}}{6!}(x-1)^6$

Para esa expresión del resto, el error máximo se obtendrá para los valores de x y de ξ que, dentro del intervalo establecido (0,2), presenten el resultado más desfavorable. Como no es conocido el signo del error, se considera el valor absoluto.

El valor más desfavorable para x, se presenta en cualquier extremo del intervalo I dado, al resultar la base (x-1) de la potencia sexta, del mayor valor: 2 - 1 = 1, o: 0 - 1 = 1.

En el caso de ξ, al ser exponente de la base e, su mayor expresión es para el extremo mayor del intervalo, es decir 2.

Con ello resulta: $R_6(x)\ \text{máximo} = \left|\frac{e^2}{6!}\right| \approx 0{,}0103$

iii) En este caso, el problema tiene definido el intervalo I = (a,b) y el error máximo admisible, por lo que debe determinarse el valor de n, grado del polinomio.

Es corriente que deba procederse por tanteos, dado que según la expresión del resto, en general no puede despejarse n directamente. Ello no presenta un inconveniente mayor, dado que la presencia del factorial permite una rápida convergencia.

Se considera nuevamente la expresión de $R_{(n+1)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

Subsiste el caso más desfavorable para la variable x en 0 y en 2, con lo que la base de la potencia (x-c) es igual a 1, y la misma resulta también igual a la unidad, por lo que no aparece allí la incógnita n.

Además, la derivada de la función sigue siendo e^x, con lo que siempre será: $f^{(n+1)}(\xi) = e^{\xi}$., y para ella, el valor más desfavorable en R(x) sigue siendo: ξ = 2. Con este análisis la expresión queda simplificada a: $R_{(n+1)}(x) = \frac{e^2}{(n+1)!}$

Las condiciones requeridas para el problema determinan que el valor máximo admisible de $R_{(n+1)}(x)$ sea de 0,000001, lo que permite el planteo numérico y tener la respuesta final:

$$\left| \frac{e^2}{(n+1)!} \right| \leq 10^{-6} \Rightarrow (n+1)! \geq e^2.10^6 \Rightarrow (n+1)! \geq 7390000 \Rightarrow$$

(Sabiendo que: 10! = 3.628.800 ; 11! = 39.916.800) , la condición que lo cumple es 11!, por lo que:

(n+1)! = 11! ⇒ n = 10 que es la respuesta buscada para este punto iii).

En definitiva, el menor grado del Polinomio para obtener un error menor que el establecido, será 10.

Otro ejemplo, utilizando ahora un Polinomio de Mac Laurin:

Determinar el valor de cos $\frac{\pi}{6}$ con cuatro cifras exactas, con un polinomio de potencias de x.

El problema plantea dos determinaciones a resolver: i) Establecer el grado n del polinomio que cumpla la aproximación requerida, y ii) Calcular el valor concreto aproximado de cos $\frac{\pi}{6}$.

En el enunciado, está determinado el valor de c = 0 por requerir potencias de x, como así también el valor del intervalo, que se extiende desde 0 al valor de π/6 que es donde se quiere determinar el valor aproximado. Por ello es I = (0, $\frac{\pi}{6}$).

Recordando una vez más la fórmula de Mac Laurin con resto R(x), que es:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n + R_n(x), \text{ o:}$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0).(x)^i}{i!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x)^{n+1}, \text{ con } \xi \text{ entre c y x, y con x } \in \text{ al intervalo (a,b)}$$

Para la función f(x) = cos x , las derivadas sucesivas, y sus valores en c = 0, como asimismo la derivada de orden n + 1, son:

$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = \cos 0 = 1$
$f'(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$
$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$
$f^{(3)}(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(3)}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1$
$f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(5)}(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$
$f^{(6)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(6)}(0) = -\cos 0 = -1$
. . . .

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} \pm \operatorname{sen} x \text{ , si } n+1 \text{ es impar} \\ \pm \cos x \text{ , si } n+1 \text{ es par} \end{cases}$$

Con lo que el desarrollo de la fórmula para la función coseno, queda:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} \xi \text{ o } \cos \xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Con esta expresión, se pueden resolver las cuestiones planteadas:

i) El Resto de Mac Laurin tiene su expresión más desfavorable cuando $x = \frac{\pi}{6}$, mientras que el valor de ξ depende si es derivada con seno o con coseno. De todas maneras el resultado máximo posible es igual a la unidad (valor absoluto máximo de seno o coseno).

Eso permite expresar el Resto de Taylor de forma de encontrar n para que el error sea menor que 0,00001 (cuatro cifras exactas para el resultado). Resulta, con los valores señalados:

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} \leq 0{,}00001 \Rightarrow (n+1)! \geq 10^5.\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} \quad (*)$$

Para encontrar n, debemos proceder por tanteos:

n = 5 ; (n+1)! = 720 ; $10^5.\left(\frac{\pi}{6}\right)^{5+1} = 2060 \Rightarrow$ no se verifica (*)

n = 6 ; (n+1)! = 5040 ; $10^6.\left(\frac{\pi}{6}\right)^{6+1} = 1078 \Rightarrow$ si se verifica (*)

Por lo tanto, el grado n del polinomio es 6, siendo el mismo:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$, con error < 0,00001 en (0, $\frac{\pi}{6}$)

ii) El cálculo aproximado se obtiene simplemente con el reemplazo de $x = \frac{\pi}{6}$ en la expresión del polinomio resultante

$$\cos x \approx 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^6}{6!} =$$

= 1,0000000 - 0,1370778 + 0,0031317 - 0,0000286 =

= 0,8660253

Se obtuvo como valor aproximado: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0{,}8660253$

Mientras que el valor exacto es : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}8660254$

El error, es mínimo: $1{,}15 \times 10^{-7}$

Sucesiones

Sea el conjunto N de los números naturales: N = {1,2,3,…,n,...}, y se le asocia a todos y cada uno de ellos un número real determinado, simbolizado como a_n, siendo n el número natural que le corresponde. Esta asignación que proponemos hace que:

al número natural 1 le corresponde el número real a_1,
al número natural 2 le corresponde el número real a_2,
al número natural 3 le corresponde el número real a_3,
....,
al número natural n le corresponde el número real a_n,
....,

Ello significa que se obtiene un nuevo conjunto, el formado por los elementos: $\{a_1,a_2,a_3,\dots a_n,\dots\}$. que presenta la característica de ser un conjunto ordenado de infinitos números reales, que se llama sucesión de números reales.

Los elementos de la sucesión se llaman términos.
La sucesión se simboliza como (a_n) o $\{a_n\}$,
Es válido indicar, entonces: $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3,..., a_n, ...$

Las características de la definición dada contienen algunos aspectos esenciales a tener siempre en cuenta:

- Es un conjunto de números reales.
- Se trata de un conjunto ordenado.
- Contiene infinitos elementos.
- Hay un primer elemento, cada uno tiene otro que le sigue, pero no hay un "último elemento" de una sucesión.

Lógicamente no se pueden expresar por extensión la totalidad de los términos de una sucesión, por lo que para definirla hay que indicar la ley o correspondencia entre los números naturales y los reales que forman la sucesión.

Lo corriente es expresar la sucesión por alguna forma algebraica, que permita precisar cuanto vale cada uno de los infinitos términos de la misma.

Simbólicamente se definirá con el término genérico, como se ha dicho, indistintamente entre paréntesis o entre llaves. Algunos ejemplos:

$$(n^2) = 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \dots,\ n^2,\ \dots$$

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\} = 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \dots,\ \frac{n+1}{n},\ \dots$$

La correspondencia con que se caracteriza la definición de sucesión, y con el concepto ya conocido de función, nos permite interpretar a la sucesión como una función cuyo dominio sea el conjunto N de los números naturales.

Gráfica de una sucesión

Es posible graficar una sucesión en un sistema de ejes cartesianos tradicional, con eje de abscisas los números naturales, y eje de ordenadas los números reales, posibles valores de los términos de la sucesión.

La gráfica de la sucesión será un conjunto de infinitos puntos aislados. Cada punto tendrá genéricamente las coordenadas (n,a_n), siendo $n \in N$ y $a_n \in R$.

En la figura 1 se representa a título de ejemplo, la sucesión cuyo término general es:

$$\{ a_n \} = \{ (-1)^{n+1}\frac{1}{2}n \}$$

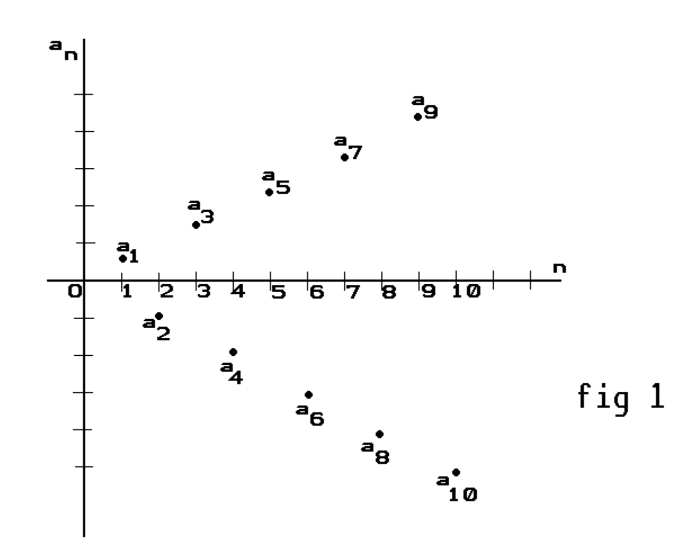


fig 1

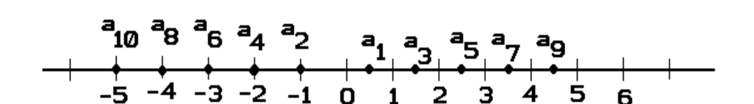
Normalmente se utiliza otra forma de representar la gráfica de una sucesión, con el fin de visualizar mejor la tendencia de los valores de los términos de la misma a medida que crece el valor de n.

Se utiliza para ello una única recta, en la que se indica el origen O y el segmento unidad, representando los mismos sobre esa recta.

Se visualiza así, "hacia donde va" el valor de la sucesión para n en aumento.

En la figura 2 vemos dos ejemplos: en la parte superior el de la sucesión del ejemplo anterior: $\{ a_n \} = \{ (-1)^{n+1}\frac{1}{2}n \}$, observando que los valores de a_n se alejan del origen, y no tienden a ningún valor determinado.

En el ejemplo inferior, se representa la sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, para la cual se visualiza que los términos para n crecientes van aproximándose al valor cero. Este concepto se formalizará más adelante.



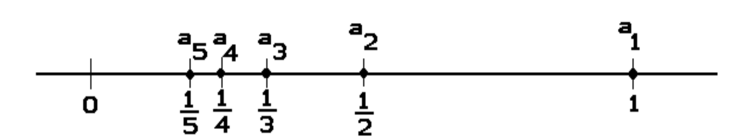


fig 2

Formas de expresar una sucesión

Ya se ha indicado que, en general, se representa por el término genérico que la define, encerrado entre paréntesis o llaves.

También puede presentarse como dos o más formas algebraicas, según los términos, por ejemplo:

$$\{a_n\} = \begin{cases} n, \text{ si n es par} \\ n^2, \text{ si n es impar} \end{cases}$$

Con lo que resulta la sucesión: $\{a_n\} = 1,\ 4,\ 3,\ 16,\ 5,\ 36,\ ...$

Una sucesión particular, llamada de Sucesión de Fibonacci, establece que sus dos primeros términos son iguales a la unidad, y cada uno de los siguientes se toma como la suma de los dos inmediatos que lo preceden. Así queda su ley de formación y sus primeros términos

Su ley de formación: $a_1 = 1;\ a_2 = 1;\ a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$

Sus primeros términos: $(a_n) = 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ ...\ ,...$

Y así pueden expresarse otras sucesiones arbitrariamente, con tal de verificarse la definición que requiere sea un conjunto ordenado y en correspondencia con los valores de n.

Álgebra de las sucesiones

Los conceptos son similares a los desarrollados para el álgebra de funciones, por lo que aquí son simplemente enunciados. Sean dos sucesiones cualesquiera (a_n) y (b_n). Entonces:

Las sucesiones son iguales, si para todo número natural n, se verifica que a_n y b_n son iguales:

$(a_n) = (b_n)$ si y solo si $\forall n \in N$ es: $a_n = b_n$

Se define como suma de las sucesiones (a_n) y (b_n) , a la sucesión $(a_n + b_n)$.

Se define como diferencia entre las sucesiones (a_n) y (b_n) , a la sucesión $(a_n - b_n)$.

Se define como producto de las sucesiones (a_n) y (b_n) , a la sucesión $(a_n \,.\, b_n)$.

Se define como cociente entre las sucesiones (a_n) y (b_n) , a la sucesión (a_n / b_n), con $b_n \neq 0$.

Una sucesión es constante cuando para todos los n naturales, le corresponde un mismo valor $C \in R$.

Ejemplo: {4} = 4, 4, 4, ... 4, ...4,

Desarrollo de una sucesión

Un problema elementalmente sencillo es el de escribir determinado número de términos de una sucesión, a partir de la expresión genérica que la define.

Resulta, en cambio, más complejo el problema inverso, que es el de encontrar la expresión del término genérico de una sucesión, teniendo como dato el valor de determinados términos de la misma.

Para ello, debe deducirse el témino a_n, conforme pautas de mayor o menor complejidad, pero con la ventaja de que está al alcance inmediato, la verificación de la solución, con el simple reemplazo de los valores correspondientes.

A simple título de orientación en el tema, se señalan algunas pautas:

- Si hay signos alternados entre los términos dados, estará presente el factor (-1), elevado a potencia n ó n+1, según corresponda el signo del primer término.

- Si se verifica una diferencia constante, k entre los términos (o entre los respectivos numeradores o denominadores de los mismos), indica que el valor k afecta como coeficiente al "n" de la expresión genérica, y se corresponde a la forma k n ± a.

- Si la diferencia entre los términos (o también entre denominadores o numeradores) va variando, de manera que se obtiene de la misma, 3, 5, 7, 9, 2n +1,.., ello indica la presencia de la potencia de segundo grado como exponente del "n" respectivo.

Como ejemplo, si se tienen estos cinco primeros términos de una sucesión:

$$-\frac{2}{3},\ \frac{6}{6},\ -\frac{10}{11},\ \frac{14}{18},\ -\frac{18}{27},....$$

- El signo alternado, con negativo para n = 1 determina $(-1)^n$
- La diferencia constante de 4 en los numeradores indica el factor 4n
- Para n = 1, el numerador es 2, por lo que 4n se complementa restando 2, quedando en definitiva 4n - 2.
- Los denominadores tienen la diferencia creciente: 3, 5, 7, etc, que corresponde al n^2.
- Para n = 1, y el denominador es 3: se ajusta n^2 sumando 2. Queda entonces como $n^2 + 2$.

El término general buscado es entonces: $(-1)^n \dfrac{4n - 2}{n^2 + 2}$

Límite de sucesiones

El concepto de límite de una sucesión resulta muy sencillo si, se conoce previamente el concepto de límite de funciones reales, que es la forma en que se han desarrollado los temas hasta ahora.

Hay autores que introducen el concepto de límite de sucesiones en forma inicial dentro del análisis matemático y resulta luego sencillo luego asimilar el tema en funciones reales, es decir que se hace la presentación del tema en el orden opuesto al que hemos hecho.

Precisamente por la metodología que se ha seguido hasta acá, es que se expresa ahora la definición e interpretación del límite de una sucesión.

Definición: Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite L, si para cualquier $\varepsilon > 0$ que determina un entorno de centro L y radio ε, existe un valor N, natural, tal que para todo n > N , se verifica que los valores de los términos de la sucesión a_n pertenecen al entorno (L,ε).

En símbolos: $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}\ /\ \forall\ n > N \Rightarrow a_n \in E(L,\varepsilon)$

(N es un número natural, mientras que $\mathbb{N}$ indica el conjunto de los naturales)

La interpretación gráfica del concepto se hace sencilla con la forma de graficar los términos de la sucesión sobre una única recta. (fig 3) Allí se representa la sucesión:

$\{a_n\} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{5},\ -\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{7},\ \ldots$, indicándose los puntos a_1, a_2, a_3, ..., que se van alternando en su ubicación a un lado y otro del origen O, y aproximándose al mismo.

Si se desea interpretar la definición de límite dada, para ello se establece un valor ε_1 arbitrario, (fig 3) y se observa que la condición se verifica para N = 4, ya que todos los a_n a partir del a_5, se encuentran en el entorno de centro 0 y radio ε_1.

Elegido otro ε_2, ahora menor, resulta lógica y consecuentemente mayor el valor de N, que pasa a ser ahora N = 6, con lo que también todos los sucesivos términos a partir de a_7 pertenecen al nuevo entorno de centro 0 y radio ε_2.

Verificación de límite de una sucesión por definición.

La metodología de verificación del límite de una sucesión aplicando la definición es absolutamente análoga a la utilizada en límite de funciones, por lo que se propone como ejercitación.

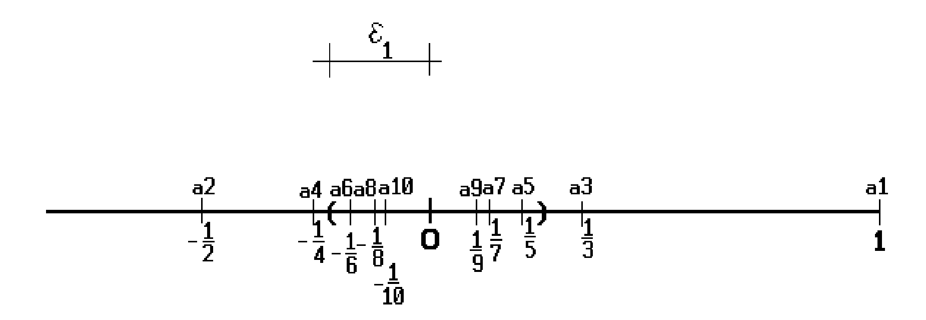
Sucesiones convergentes o divergentes

Si el límite L de una sucesión es finito, la misma es convergente.

En caso contrario, la sucesión es divergente.

Propiedades de los límites de sucesiones

Revisten total analogía conceptual y de demostración, por lo que simplemente son aquí enunciados sin detalladas consideraciones.



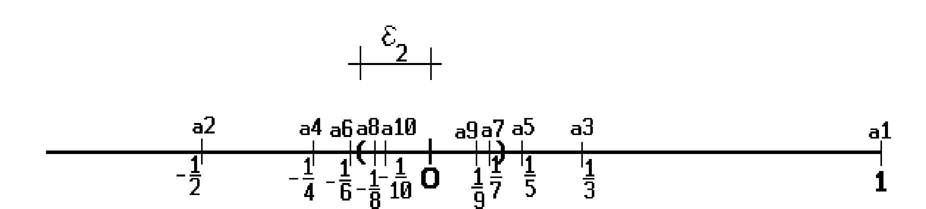


fig 3

1) Si una sucesión (a_n) tiene límite, entonces éste es único.

Sean ahora dos sucesiones convergentes (a_n) y (b_n), de límites respectivamente L_1 y L_2:

$\lim\limits_{x\to+\infty} (a_n) = L_1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (b_n) = L_2$ entonces:

2) La sucesión suma es convergente, y su límite vale la suma de los límites:

$$\lim_{x\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim_{x\to+\infty} (a_n) + \lim_{x\to+\infty} (b_n) = L_1 + L_2$$

3) La sucesión diferencia es convergente, y su límite vale la diferencia de los límites:

$$\lim_{x\to+\infty} (a_n - b_n) = \lim_{x\to+\infty} (a_n) - \lim_{x\to+\infty} (b_n) = L_1 - L_2$$

4) La sucesión producto es convergente, y su límite vale el producto de los límites:

$$\lim_{x\to+\infty} (a_n.b_n) = \lim_{x\to+\infty} (a_n). \lim_{x\to+\infty} (b_n) = L_1.L_2$$

5) La sucesión cociente es convergente, y su límite vale el cociente de los límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} (a_n)}{\lim\limits_{x\to+\infty} (b_n)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ obviamente con } L_2 \neq 0$$

6) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (a_n) = L$, entonces es: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left| (a_n) \right| = | L |$

7) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (a_n) = L$, y $L > 0$ con todos los $a_n > 0$, entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln a_n) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty} a_n\right) = \ln L$$

8) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (a_n) = L$, y sea $a \in R$, entonces: $\lim\limits_{x\to+\infty} (a)^{a_n} = (a)^{\lim\limits_{x\to+\infty} (a_n)} = (a)^L$

9) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (a_n) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} (b_n) = L_2$ con $L_1 > 0$, entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} (a_n)^{(b_n)} = \left[\lim_{x\to+\infty} (a_n)\right]^{\left[\lim\limits_{x\to+\infty} (b_n)\right]} = (L_1)^{(L_2)}$$

10) Si (a_n), (b_n), (c_n), son sucesiones tales que $\forall$ n : $a_n < b_n < c_n$, y

$$\lim_{x\to+\infty} (a_n) = \lim_{x\to+\infty} (c_n) = L, \text{ entonces } \lim_{x\to+\infty} (b_n) = L$$

Límites infinitos de las sucesiones

De las sucesiones divergentes, definidas como aquellas para las que no existe el límite finito L, interesa distinguir a aquellas para las cuales el valor de a_n crece indefinidamente para

valores crecientes de n, superándose cualquier valor arbitrariamente grande, a partir de un cierto término. Es entonces, que se dice que la sucesión tiene límite más infinito, o es divergente a más infinito.

Análogamente, si el valor que va tomando el término a_n es decreciente indefinidamente tomando valores negativos de valor absoluto arbitrariamente grande a partir de un cierto término, se dice que la sucesión tiene límite menos infinito, o es divergente a menos infinito.

Definimos ahora para un número k positivo , (k > 0) el "entorno de más infinito, o de infinito positivo", al conjunto de los números x mayores que k, es decir el intervalo (k , + ∞).

Análogamente, el "entorno de menos infinito, o de infinito negativo", queda definido para un número k positivo (k > 0), al conjunto de los números menores que - k , o sea el intervalo (- ∞ , - k).

Con esto podemos definir formalmente a los límites infinitos:

La sucesión (a_n) tiene límite más infinito si para cualquier k arbitrariamente grande y positivo, existe un valor N ∈ N, de manera que para todo n > N , se verifica que los valores de los términos de la sucesión a_n pertenecen al entorno de más infinito (k ,+ ∞), y se simboliza: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(a_n\right) = +\infty$

La sucesión (a_n) tiene límite menos infinito si para cualquier k arbitrariamente grande y negativo, existe un valor N ∈ N, de manera que para todo n > N , se verifica que los valores de los términos de la sucesión a_n pertenecen al entorno de más infinito (- ∞,-k), y se simboliza: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(a_n\right) = -\infty$

Sucesiones monótonas

Una sucesión se dice que es creciente, si cada término es mayor o igual que el precedente:

(a_n) creciente ⇔ $\forall$ n : $a_{n+1} \geq a_n$

Una sucesión se dice que es decreciente, si cada término es menor o igual que el precedente.

(a_n) decreciente ⇔ $\forall$ n : $a_{n+1} \leq a_n$

Las sucesiones crecientes y las sucesiones decrecientes reciben el nombre genérico de sucesiones monótonas.

Las sucesiones monótonas pueden tener o no límite finito, sean aquellas crecientes o decrecientes. Por ejemplo:

$\left(n^3\right)$ es sucesión monótona creciente, y es divergente a más infinito, ya que

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(n^3\right) = +\infty$

$\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ es sucesión monótona creciente, y es convergente, ya que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$(3n - n^2)$ es sucesión monótona decreciente y es divergente a menos infinito, por ser

$$\lim_{x \to +\infty} (3n - n^2) = -\infty$$

Sucesiones acotadas

Una sucesión es acotada si los valores de sus términos tienen cota inferior y superior, lo que puede expresarse diciendo que:

$\{a_n\}$ es acotada , si $\exists$ C > 0 / $\forall$ n : $-C < a_n < +C$

Los conceptos de sucesión monótona y de sucesión acotada permiten enunciar, sin demostración, un importante teorema, que permite asegurar, a partir de esas condiciones si una sucesión es convergente.

Toda sucesión monótona y acotada es convergente, es decir que tiene límite finito.

Ejemplo:

Sea la sucesión $(a_n) = \frac{3n - 5}{n + 4}$

Se desea: a) probar que es creciente, b) probar que es acotada, c) determinar su límite.

a) Debemos probar que $a_{n+1} > a_n$, o sea que $\frac{3(n+1) - 5}{(n+1) + 4} > \frac{3n - 5}{n + 4} \Rightarrow$ es decir, probar que:

$[3(n+1) - 5].(n+4) > (3n - 5).[(n+1) + 4]$, o sea que $\Rightarrow$ $(3n - 2).(n + 4) > (3n - 5).(n + 5) \Rightarrow$

$3n^2 + 12n - 2n - 8 > 3n^2 + 15n - 5n - 25 \Rightarrow 3n^2 + 10n - 8 > 3n^2 + 10n - 25 \Rightarrow -8 > -25$

que es un resultado evidente, que prueba la expresión inicial, con lo que la sucesión es creciente.

b) Si es creciente, el primer término será el menor de todos, y consecuentemente su cota inferior:

$a_1 = -\frac{2}{5}$

Se debe probar que existe cota superior, que $a_n < C$, lo que equivale a que exista un n que verifique:

$\frac{3n-5}{n+4} < C \Rightarrow (3n - 5) < (n + 4)C \Rightarrow 3n - 5 < Cn + 4C \Rightarrow 3n - Cn < 5 + 4C \Rightarrow n(3 - C) < 5 + 4C$

Para que se verifique la desigualdad anterior, debe considerarse cualquier valor de C mayor que 3: C > 3 , ya que de esa manera el primer miembro de la desigualdad es un número negativo, y el segundo un numero positivo, con lo que la misma queda satisfecha para cualquier n.

Cualquier C > 3 es cota superior, con lo que la sucesión es acotada.

c) Precisamente el límite existe, ya que se demostró que la sucesión es creciente y acotada. Será:

$$\lim_{x \to +\infty} = \frac{3n - 5}{n + 4} = 3$$

El número e

La determinación de la existencia del límite de una sucesión creciente y acotada tiene, entre otras la posibilidad de determinar uno de los límites más importantes de la matemática.

Puede proponerse como práctica avanzada, la acotación de e, a partir de la expresión de una sucesión.

Sea $\{a_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Esta sucesión es creciente, lo que puede probarse aplicando procedimientos algebraicos relativamente sencillos.

Ello determina que el primer término de la misma, para n=1 y que corresponde a su cota inferior es $a_1 = 2$, y puede probarse también (no tan fácilmente) que una cota superior es el número 3, con lo que $2 \leq a_n \leq 3$.

El límite de esta sucesión es precisamente el número e, uno de los cinco números más importantes de la matemática.

Es fascinante siempre, aunque nos apartemos un poco de nuestro tema, recordar la vinculación de esos cinco números fundamentales (0, 1, i, π, e) con la magistral y sencilla expresión de Euler:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Puede también considerarse como práctica sencilla, la determinación del valor de e, considerando la función e^x, aplicando la Fórmula de Taylor para dicha función considerando el punto c = 1, logrando la aproximación que se desee con el grado de polinomio n que sea necesario. Ello es posible y sencillo, ya que e^x, admite infinitas derivadas sin complicaciones.

Función Primitiva e Integral Indefinida

Tratamos ahora el problema opuesto al de la obtención de las derivadas de una función.

El planteo inverso que se enuncia es precisamente la operación inversa a la derivación, y se trata, concretamente, hallar a partir de una función determinada, otra función cuya derivada sea precisamente la función dada.

En síntesis, conocida una determinada función f, el propósito es determinar otra función F(x), de manera que se verifique que $F'(x) = f(x)$.

Debe advertirse que el problema aquí propuesto es de un grado de complejidad mucho mayor que el ya conocido de la determinación de una función derivada.

Encontrar la derivada de una función cualquiera, es siempre posible, a partir de las propiedades y reglas de derivación vistas, ya que por más complicada que sea su resolución, siempre hay un resultado obtenible.

En cambio, el planteo opuesto que se enuncia ahora es, en general mucho más trabajoso, y debe advertirse que no siempre tiene solución en los términos que planteamos.

Definimos el concepto: Sea f una función definida en un conjunto D. La función F, definida en el mismo conjunto es una primitiva de f, si y solo si F es derivable en el conjunto D, y su derivada es f.

$$F \text{ es primitiva de } f \text{ en } D \Leftrightarrow \forall x \in D : F'(x) = f(x)$$

Esta función, así definida, se llama indistintamente primitiva, antiderivada o integral de la función f.

Elementalmente, si $f = 8x^3$, será función primitiva de f: $F_0 = 2x^4$, ya que $F'_0 = 8x^3 = f$, pero también lo será: $F_1 = 2x^4 + 5$, y también: $F_2 = 2x^4 - ½$, y, en general:

$$F = 2x^4 + C \text{ , ya que se cumple: } F'_0 = F'_1 = F'_2 = \ldots = F' = f$$

Esto hace que se exprese, con carácter general, que todas las primitivas de la función f son de la forma F + C ($C \in R$), a través del siguiente teorema:

Teorema:

Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos funciones primitivas de la función f (x) en el intervalo D, entonces, su diferencia es una constante, es decir:

$$\text{Si } F_1(x) \text{ es primitiva de } f(x) \text{ en } D, \text{ y } F_2(x) \text{ es primitiva de } f(x) \text{ en } D \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = C$$

La demostración es muy simple: por definición de primitiva a partir de la hipótesis, queda asegurado que:

$$\begin{cases} F'_1(x) = f(x) \\ F'_2(x) = f(x) \end{cases}$$

Si llamamos $\varphi(x)$ a la función diferencia entre F_1 y F_2: $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$
será: $\varphi'(x) = F'_1(x) - F'_2(x) = f(x) - f(x) = 0$, con lo que: $\forall\ x \in D$ es $\varphi'(x) = 0$
por lo que $\varphi(x)$ es constante en D

Considerando el Teorema de Lagrange, que es de aplicación dado que la función $\varphi(x)$ es continua y derivable en D, y para un intervalo $[\ a,x\ ] \subseteq D$, la expresión del mismo es:

$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a).\ \varphi'(\xi)$ $\qquad a < \xi < x$

como es $(x - a) \neq 0$ por existir el intervalo, y, $\forall\ \xi$: $\varphi'(\xi) = 0$, se verifica que: $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$,

con lo que : $\varphi(x) = \varphi(a) = C$, constante. Finalmente, reemplazando $\varphi(x)$ por $F_1(x) - F_2(x)$

queda: $F_1(x) - F_2(x) = C$, o también: $F_1(x) = F_2(x) + C$

De este teorema puede asegurarse que si es conocida una primitiva cualquiera F(x) de la función f(x), entonces, toda otra primitiva de la misma es de la forma: F(x) + C, siendo C una constante real.

La forma más general de expresar la conclusión obtenida del teorema precedente, es enunciar lo hasta aquí visto de esta manera:

Si para una función f(x) existe una primitiva F(x) en el conjunto D, entonces existen infinitas primitivas, todas de la forma F(x) + C.

Se dice entonces que F(x) + C , constituye la familia de primitivas de f(x).

Integral indefinida

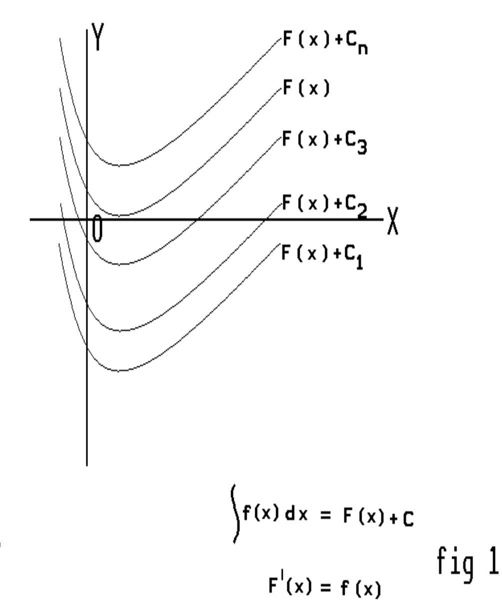
Definimos el concepto, expresando que: si F(x) es una función primitiva de f(x), la expresión F(x) + C se llama Integral Indefinida de la Función f(x), y se simboliza de esta manera: $\int f(x)\, dx$

En esa expresión, cada elemento se denomina:

$\int$: símbolo de la integral ;
$f(x)$: integrando ;
$f(x)\, dx$: elemento de integración

En resumen: $\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + C, \text{ si } F'(x) = f(x)}$

Interpretación geométrica de la integral indefinida



Por ser $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ la expresión de una familia o conjunto de funciones, su gráfica será una familia o conjunto de curvas desplazadas verticalmente hacia arriba y hacia abajo con respecto a la gráfica de F(x).

En realidad, la integral indefinida es un conjunto de infinitas funciones de la forma F(x) + C, por lo que la representación gráfica es el conjunto de las infinitas gráficas correspondientes.

Genéricamente indicamos varias curvas paralelas como se ve en la figura 1, donde se indica una curva cualquiera de ellas como representativa de la primitiva F(x), y todas las demás corresponderán a las expresiones genéricas:

$F(x) + C_1$, $F(x) + C_2$, ... ,$F(x) + C_n$.

Propiedades de la integral indefinida

Las propiedades que corresponden a la integral indefinida que se enuncian, se justifican inmediatamente a partir de la definición de la misma. En ellas, consideramos que F'(x) = f(x) en D.

1) La derivada de una integral indefinida es igual al integrando

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{derivando ambos miembros:}$$
$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' \qquad \text{resulta que}$$
$$\int f(x)\,dx = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x)$$

2) La diferencial de una integral indefinida es igual al elemento de integración

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{diferenciando ambos miembros:}$$
$$d\left[\int f(x)\,dx\right] = d\left[F(x) + C\right] = d\,F(x) + 0 = F'(x)dx = f(x)\,dx$$

3) La integral indefinida de la diferencial de una función es igual a esta función más una constante arbitraria

$$D\,F(x) = f(x)\,dx \qquad \text{integrando ambos miembros:}$$
$$\int D\,F(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

4) La integral indefinida de la suma algebraica de dos o más funciones es igual a la suma algebraica de sus integrales

$\int\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx$ (es la tesis). Derivando ambos miembros

i) $\left\{\int\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] dx\right\}' = f_1(x) \pm f_2(x)$ (*) (por propiedad 1)

ii) $\left[\int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx\right]'$ = por suma de derivadas =

$\left[\int f_1(x)\, dx\right]' \pm \left[\int f_2(x)\, dx\right]' = f_1(x) \pm f_2(x)$ (*) (por propiedad 1)

Vemos por (*) que se cumple la tesis

5) Si a es un factor constante que multiplica al integrando, el mismo puede extraerse del símbolo de la integral

$\int a.f(x)\, dx = a.\int f(x)\, dx$ (tesis). Derivando separadamente ambos miembros:

i) $\left[\int a.f(x)\, dx\right]' = a.f(x)$ (por propiedad 1)

ii) $\left[a.\int f(x)\, dx\right]' = a.\left[\int f(x)\, dx\right]'$ por propiedad de derivada =

$= a\left[\int f(x)\, dx\right]' = a.f(x)$ (por propiedad 1)

6) La integral indefinida de una función f de una expresión lineal ax + b es igual a la función primitiva F de la misma expresión lineal, dividido el coeficiente de x más una constante C

si: F '(x) = f(x) (F, primitiva de f), se verifica: $\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ (tesis).
Derivando separadamente ambos miembros

i) $\left[\int f(ax+b)\, dx\right]' = f(ax+b)$ (por propiedad 1)

ii) $\left[\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)$ por propiedad de derivadas =

$= \frac{1}{a} f(ax+b).a = f(ax+b)$ con lo que se verifica la tesis

Métodos para la determinación de primitivas - Métodos de Integración

Hemos dicho que la problemática a encarar es mucho más compleja que la de la derivación, y que no siempre existe ni tiene solución encontrar la primitiva correspondiente a una función dada.

A simple título de ejemplo sencillo, basta indicar que una función sencilla como $e^{-\sqrt{x}}$, no tiene una función primitiva, ya que no existe función alguna tal que su derivada sea $e^{-\sqrt{x}}$.

Según las características de la función integrando deberá aplicarse una determinada metodología que permita encontrar una primitiva y con ella la familia de las infinitas primitivas.

Las distintas metodologías a utilizar conforman los que se llaman genéricamente métodos de integración.

Desarrollaremos algunos de los métodos más corrientes. Los mismos requieren abundante práctica para que, ante una función determinada se esté en condiciones de encontrar el método adecuado y utilizarlo.

Integrales inmediatas

Las llamadas integrales inmediatas no constituyen un método propiamente dicho. Son aquellas cuya determinación es directa, y básicamente surgen de la Tabla de Derivadas, con la búsqueda de la función a integrar en la columna de las funciones derivadas, y la obtención de la primitiva a su izquierda. La "Tabla de Integrales Inmediatas" sería la misma Tabla de Derivadas de las Funciones Elementales con sus columnas invertidas.

Ejemplos de estas determinaciones elementales serían:

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{5}{x} \, dx = 5 \int \frac{1}{x} \, dx = 5 \ln x + C$$

$$\int \operatorname{cosec} x . \operatorname{cotg} x \, dx = -\int -\operatorname{cosec} x . \operatorname{cotg} x \, dx = \operatorname{cosec} x + C$$

Es importante agregar una integral inmediata importante y totalmente práctica que es

$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con } n \in R \, ; \, n \neq -1$, de elemental verificación, derivando $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Ejemplos sencillos de aplicación de esta integral inmediata, son:

a) $\int \frac{1}{2} \sqrt[3]{x} \, dx = \frac{1}{2} \int (x)^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{1}{2} . \frac{3}{4} (x)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} x \sqrt{x} + C$

b) $\int x \sqrt[4]{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{4}} dx = \frac{4}{9} x^{\frac{9}{4}} + C = \frac{4}{9} x^2 \sqrt[4]{x} + C$

La utilización de la propiedad que indicamos como número 6) cuando es aplicada la función a integrar a una expresión lineal a x + b, permite resolver en forma directa muchos casos a partir de las integrales inmediatas propiamente dichas. Por ejemplo:

$$\int e^{(2x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{(2x+1)} + C$$

$$\int \frac{1}{1+(4x-2)^2}\,dx = \frac{1}{4}\,\text{arc tg}\,(4x-2)^2 + C$$

$$\int \sec^2\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right)dx = 4\,\text{tg}\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right) + C$$

Integración por sustitución o por cambio de variable

Cuando en el integrando se presenta una expresión que pueda considerarse como la derivada de una función compuesta, o, lo que es lo mismo, que el elemento de integración sea posible obtenerlo de la diferencial de una composición de funciones, se aplica el método así llamado.

Consiste precisamente en efectuar una sustitución en la expresión a integrar, a través de un adecuado cambio de variable.

De esta manera, se obtiene en general, una integral inmediata.

El sustento de lo enunciado tiene en cuenta la forma de derivación de las funciones compuestas.

Puede desarrollarse teóricamente en forma genérica lo dicho, de esta manera:

Si se debe resolver una expresión cuyo integrando sea de la forma: $\int f\left[g\,(x)\right].g'(x)\,dx$ (*)

Si F' = f, será: $\int f\left[g\,(x)\right].g'(x)\,dx = F\left[g\,(x)\right] + C$

Lo que es comprobable aplicando simplemente la regla de la cadena, ya que:

$$\left\{F\left[g\,(x)\right] + C\right\}' = F'\left[g\,(x)\right]g'(x) = f\left[g\,(x)\right].g'(x)$$

La resolución de una expresión a integrar de la forma (*) es decir, como resultado de una derivación de función compuesta es de sencilla solución encontrando el correcto cambio de variable, de la forma:

u = g(x) , para la cual sería: du = g'(x).dx, De esta manera, la expresión del tipo (*) queda sencillamente resuelta:

$$\int f\left[g\,(x)\right].g'\,(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F\left[g\,(x)\right] + C$$

La dificultad que se presenta hasta disponer la práctica necesaria es la de identificar la forma de una diferencial de una función compuesta, y luego, la de efectuar el cambio de variable adecuado.

Cabe señalar que en una misma expresión pueden presentarse a veces distintas sustituciones que concluyen en el mismo resultado correcto. Vemos algunos ejemplos para aplicar lo desarrollado:

i) $\int \sqrt{\cos x}\,\text{sen}\,x\,dx$ = hacemos el cambio de variable: u = cos x $\Rightarrow$ du = - sen x.dx, y sustituyendo en la integral, queda

$= -\int \sqrt{u}\,du = -\int u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$. Volviendo a variable x, se tiene finalmente la respuesta: $\int \sqrt{\cos x}\,\text{sen}\,x\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + C$

ii) $\int \frac{x}{1+x^2}$ = haciendo el cambio de variable: z = 1 + x^2 $\Rightarrow$ dz = 2x.dx, que reemplazada en la integral, queda: = $\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln z + C$ = Volviendo a la variable x nos queda la solución: $\int \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$, o también $= \ln K\sqrt{1+x^2}$, con $C = \ln K$

iii) $\int \text{tg}\,x\,dx = \int \frac{\text{sen}\,x.dx}{\cos x}$ = y con la sustitución: r = cos x $\Rightarrow$ dr = - sen x.dx , nos queda: $= -\int \frac{dr}{r} = -\ln r + C$; nuevamente en la variable x, obtenemos la integral buscada:

$$\int \text{tg}\,x\,dx = -\ln(\cos x) + C = \ln K(\sec x)$$

Integración por Partes

La regla del diferencial de un producto de dos funciones derivables, u y v, permite deducir una expresión de la que resulta una forma (o método) de integración, llamada integración por partes, muy cómoda y práctica cuando es posible su utilización.

El diferencial del producto u.v se expresa como: $d(u.v) = u.dv + v.du$ v, que integrado miembro a miembro resulta: $\int d(u.v) = \int u.dv + \int v.du$, y, por lo ya visto, en el primer miembro es

$$u.v = \int u.dv + \int v.du$$

No se coloca "+ C" en el primer miembro por estar presente conceptualmente la constante genérica en las integrales indefinidas que quedan en la expresión en el segundo miembro. Trasponiendo términos, queda la muy útil "fórmula de integración por partes":

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

Esa expresión indica en el primer miembro la integral indefinida a resolver, que resulta igual al segundo, compuesto por un producto de funciones y otra integral indefinida resultante, que queda para solucionar, en instancia siguiente. La metodología es de aplicación siempre y cuando:

i) El elemento de integración a resolver esté formado por el producto de una función (llamada u en la expresión) por el diferencial de otra función (indicado con dv en la misma).

ii) El diferencial dv debe ser tal que se pueda determinar fácilmente la función v correspondiente al mismo, lo que requiere sea de posible determinación la primitiva respectiva.

iii) La nueva integral que aparece en el segundo miembro sea de una dificultad menor, o a lo sumo igual a la inicial.

El procedimiento concreto consiste, a partir de: $\int v.du$

a) Separar el elemento de integración en los factores "u" y "dv"
b) A partir de u, diferenciando, obtener du, y desde dv, obtener la primitiva v.
c) Construir el segundo miembro, con los elementos: u, v, du, dv.
d) Resolver la integral: $\int v.du$. Si esta no es inmediata, pero por lo menos de igual dificultad, repetir el procedimiento.

En símbolos:

$$\int u.dv \;\Rightarrow\; \begin{cases} u = \\ dv = \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} du = \\ v = \end{cases} \;\Rightarrow\; \int u.dv = u.v - \int v.du$$

Algunos ejemplos:

i) $$\int x \text{ sen } x\, dx \;\Rightarrow\; \begin{cases} u = x \\ dv = \text{sen } x.dx \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} du = 1.dx \\ v = -\cos x \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int x \text{ sen } x\, dx = -x.\cos x - \int -\cos x\, dx \;-\cos x.dx = -x \cos x + \text{sen } x + C$$

ii) $$\int \text{arc tg } x\, dx \;\Rightarrow\; \begin{cases} u = \text{arc tg } x \\ dv = dx \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx \\ v = x \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \text{arc tg } x\, dx = x.\text{arc tg } x - \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = x \text{ arc tg } x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C$$

iii) $$\int e^x \cos x\, dx \;\Rightarrow\; \begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x.dx \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} du = e^x.dx \\ v = \text{sen } x \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int e^x \cos x\, dx = e^x.\text{sen } x - \int e^x \text{ sen } x\, dx \qquad (*)$$

La integral que se obtiene no es inmediata, pero resulta de dificultad similar a la de origen, y, como se dijo en el procedimiento, punto d), se debe repetir el método de integración por partes.

$$\int e^x \text{ sen } x \, dx \Rightarrow \begin{cases} u = e^x \\ dv = \text{sen } x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x.dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\int e^x \text{ sen } x \, dx = -e^x.\cos x - \int -e^x \text{ sen } x \, dx$ (**), y, reemplazando (**) en (*)

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x.\text{sen } x - (-e^x.\cos x) - \int e^x \cos x \, dx$$

como la integral del segundo miembro es exactamente la inicial buscada, resulta:

$2\int e^x \cos x \, dx = e^x(\text{sen } x + \cos x)$, y, finalmente: $\boxed{\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\text{sen } x + \cos x) + C}$

Cabe señalar que la elección de u y dv cuando hay más de una alternativa, como en el ejercicio i), debe preferirse, en general, aquella con la que resulten simplificados los resultados que se obtienen de aquellos. En ese ejemplo, si se hubiese elegido dv = x , la primitiva v hubiera resultado de segundo grado, y la integral a resolver en segunda instancia más compleja.

En el ejercicio ii) la opción es única, con resultado satisfactorio.

Finalmente, en el ejemplo iii) es indistinta la elección, ya que las primitivas en cualquier caso no cambian su dificultad, y podría haberse elegido como u a la función trigonométrica y como dv a la exponencial, con desarrollo similar.

Lo que es imprescindible es que, al repetir el procedimiento como hubo que hacerse, se mantenga la elección ya hecha en el primer paso, que en ese ejemplo, es repetir la exponencial para la u y la trigonométrica para dv.

Integración de algunas funciones que contienen una función polinómica de segundo grado

Si se tienen expresiones de las formas siguientes: $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ o $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

En las que se encuentra la expresión $ax^2 + bx + c$, deben efectuarse sencillas transformaciones en la misma, con lo quedan de alguna de las formas siguientes, que constituyen todas integrales inmediatas en la nueva variable.

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \text{arc tg } u + C$$

$$\int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \text{Arg Sh } u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arc sen } u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \text{Arg Ch } u + C$$

Es importante aclarar que la forma que se obtiene surge de los coeficientes del trinomio de segundo grado, y no puede establecerse arbitrariamente a priori, sino que es consecuencia de la composición del mismo.

El desarrollo genérico de la trasformación de la expresión del trinomio $ax^2 + bx + c$ tiene un tratamiento similar al correspondiente a completar cuadrados. Lógicamente, en un caso numérico concreto se tiene una expresión más sencilla y concreta.

De la expresión : $ax^2 + bx + c =$ sacando factor común "a" = $a\,(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$, = y ahora sumando y restando la mitad del coeficiente de la variable elevado al cuadrado, y luego factoreando el trinomio cuadrado perfecto:

$$= a\,(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] \quad (*)$$

El segundo paréntesis del corchete anterior podrá resultar un número positivo o negativo, según sean los valores de a, b y c. Por eso será válido reemplazarlo por $\pm k^2$, para ambas alternativas.

Llamaremos, entonces: $\pm k^2 = \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$ y reemplazando en (*), queda =

$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]$ y sacando factor común k^2, queda: $a\,k^2\left[\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{k}\right)^2 \pm 1\right]$, y, con el cambio de variable: $u = \left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{k}\right)$

según sea el signo de "a", se llega a $ax^2 + bx + c = a\,k^2\left(u^2 \pm 1\right)$ es decir, a alguna de las expresiones presentadas al inicio.

Algunos ejemplos:

a) Calcular : $\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \int \frac{dx}{2\left(x^2 + 4x + 10\right)} = \int \frac{dx}{2\left(x^2 + 4x + 4 - 4 + 10\right)} =$

$= \int \frac{dx}{2\left[(x+2)^2 + 6\right]} = \int \frac{dx}{2.6\left[\frac{(x+2)^2}{\sqrt{6}} + 1\right]}$ = y con la sustitución $u = \frac{x+2}{\sqrt{6}}$; es $du = \frac{dx}{\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{6}}{12}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{6}}{12}$ arc tg u + C = y, volviendo a variable x = $\boxed{\frac{\sqrt{6}}{12} \text{ arc tg } \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C}$

b) Calcular : $\int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}} = \int \frac{dx}{-\sqrt{x^2+12x-28}} = \int \frac{dx}{-\sqrt{x^2+12x+36-36-28}} =$

$\int \frac{dx}{-\sqrt{\left[(x+6)^2 - 64\right]}}$ = sacando factor común 64 y -1 de la raíz $= \int \frac{dx}{8\sqrt{1-\left(\frac{x+6}{8}\right)^2}} =$

y con la sustitución $z = \frac{x+6}{8}$; es $dz = \frac{dx}{8}$ queda = $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ = arc sen z + C

y, volviendo a variable x = $\boxed{\text{arc sen } \frac{x+6}{8} + C}$

<u>Integrales irracionales del tipo $\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}$</u>

Para integrar funciones de la forma $\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}$ se aplica la metodología anteriormente vista de completar cuadrados y transformar la expresión subradical en forma similar con lo que se llegará para el trinomio a algunas de las formas vistas: $u^2 + 1$; $u^2 - 1$; $1 - u^2$.

Con lo que la integral propuesta quedará en alguna de estas formas:

i) $\int \sqrt{u^2 + 1}\, du$; ii) $\int \sqrt{u^2 - 1}\, du$; iii) $\int \sqrt{1 - u^2}\, du$

Esas integrales no son inmediatas, correspondiendo en cada caso, efectuar una sustitución predeterminada para su resolución.

Para la forma i) la sustitución es: $u = \text{Sh } t \Rightarrow (du = \text{Ch } t\, dt)$

Para la forma ii) la sustitución es: $u = \text{Ch } t \Rightarrow (du = \text{Sh } t\, dt)$

Para la forma iii) la sustitución es: $u = \text{sen } t \Rightarrow (du = \cos t\, dt)$

Es necesario en los casos en que la sustitución contiene una expresión hiperbólica, tener presentes las relaciones que se cumplen entre dichas funciones, que tienen su deducción a partir de las definiciones de las mismas funciones, y que guardan similitud con las correspondientes a las funciones trigonométricas. Algunas expresiones útiles son:

$\mathrm{Ch}^2\, t - \mathrm{Sh}^2\, t = 1$ similar a: $\mathrm{sen}^2\, t + \cos^2 t = 1$

$\mathrm{Ch}^2\, t = \dfrac{\mathrm{Ch}\, 2t + 1}{2}$ similar a: $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$

$\mathrm{Sh}^2\, t = \dfrac{\mathrm{Ch}\, 2t - 1}{2}$ similar a: $\mathrm{sen}^2\, t = \dfrac{1 - \cos 2t}{2}$

$\mathrm{Sh}\, 2t = 2\, \mathrm{Sh}\, t\, \mathrm{Ch}\, t$ similar a: $\mathrm{sen}\, 2\, t = 2\, \mathrm{sen}\, t \cos t$

$\mathrm{Ch}\, 2t = \mathrm{Ch}^2\, t + \mathrm{Sh}^2\, t$ similar a: $\cos 2\, t = \cos^2 t - \mathrm{sen}^2\, t$

Efectuando las sustituciones indicadas para cada expresión a integrar, y desarrollando con la ayuda de las expresiones anteriores, se llega, según el cada caso a alguna de estas formas:

i) $\int \sqrt{u^2 + 1}\, du = \dfrac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 + 1} + \mathrm{Arg\, Sh}\, u \right) + C$

ii) $\int \sqrt{u^2 - 1}\, du = \dfrac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 - 1} + \mathrm{Arg\, Ch}\, u \right) + C$

iii) $\int \sqrt{1 - u^2}\, du = \dfrac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 + 1} + \mathrm{arc\, sen}\, u \right) + C$

Sea un ejemplo utilizando el desarrollo expuesto: Integrar: $\int \sqrt{4x^2 - 4x - 8}\, dx$. Operamos:

$$\int \sqrt{4x^2 - 4x - 8}\, dx = \int 2\sqrt{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{4}}\, dx = \int 2\sqrt{\frac{9}{4}\left[\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \right)^2 - 1 \right]}\, dx =$$

$\int 3\sqrt{\left[\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2} \right) \right]^2 - 1}\, dx =$ sustituyendo con $u = \dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{1}{2} \right) \Rightarrow du = \dfrac{2}{3}dx \Rightarrow dx = \dfrac{3}{2}\, du$, queda:

$= \dfrac{9}{2}\int \sqrt{u^2 - 1}\, du$, y haciendo aquí la sustitución que se indicó adecuada: $u = \mathrm{Ch}\, t \Rightarrow (du = \mathrm{Sh}\, t\, dt)$

$$= \frac{9}{2}\int \sqrt{\mathrm{Ch}^2 t - 1}\, \mathrm{Sh}\, t\, dt = \frac{9}{2}\int \frac{1}{2}(\mathrm{Ch}\, 2t - 1)\, dt = \frac{9}{4}\int (\mathrm{Ch}\, 2t - 1)\, dt = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Sh}\, 2t - t \right) + C =$$

$= \dfrac{9}{4}\left(\dfrac{1}{2}\, 2\, \mathrm{Sh}\, t\, \mathrm{Ch}\, t - t \right) + C = \dfrac{9}{4}\left(\mathrm{Ch}\, t\, \sqrt{\mathrm{Ch}^2 t - 1} - t \right) + C$ (que es la expresión integrada en t) =

$= \dfrac{9}{4}\left(u\, \sqrt{u^2 - 1} - \mathrm{Arg\, Ch}\, u \right) + C$ (que es la expresión integrada en u) =

$$= \boxed{\frac{9}{4}\left[\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{4}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1} - \text{Arg Ch}\ \frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] + C}$$

que es la solución final de la integral indefinida, expresada en la variable x en que se propuso.

Integración de algunas expresiones con funciones trigonométricas

El problema general a desarrollar es cuando se presentan integrandos de la forma de productos de senos y cosenos trigonométricos elevados cada uno de ellos a exponentes cualesquiera, genéricamente en forma de la expresión: $\int \text{sen}^m x \cos^n x\, dx$

Para el desarrollo del tema, se considerarán desde los casos más simples a los más complejos.

Caso 1) Cuando el integrando es potencia impar de seno o de coseno

Sea, con p $\in$ N: $\int \text{sen}^{2p+1} x\, dx$ Al ser 2p + 1 impar, se efectúa el factoreo entre las potencias de la función (seno o coseno), de manera de dejar una potencia par 2 p. De esta manera:

$\int \text{sen}^{2p+1} x\, dx = \int \text{sen}^{2p} x \text{ sen } x\, dx =$ por propiedad de potencias $\int \left(\text{sen}^2 x\right)^p \text{sen } x\, dx =$

$\int \left(1-\cos^2 x\right)^p \text{sen } x\, dx =$ sustituyendo: $u = \cos x \Rightarrow du = -\text{sen } x\, dx$, resulta =

$= \int \left(1-u^2\right)^p du$. el integrando es el binomio $\left(1-u^2\right)$ elevado a la potencia p, que desarrollado para cualquier valor de p, resulta una suma de potencias pares de la variable u, cuyo polinomio resultante es una suma de integrales inmediatas.

Ejemplo: Integrar: $\int \cos^5 x\, dx$

$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos^4 x \cos x\, dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 \cos x\, dx = \int \left(1-\text{sen}^2 x\right)^2 \cos x\, dx =$

sustituyendo $u = \text{sen } x \Rightarrow du = \cos x\, dx$ = $\int \left(1-u^2\right)^2 du = \int \left(1-2u^2+u^4\right)^2 du =$

$u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$, y volviendo a variable x, queda:

$= \text{sen } x - \frac{2}{3}\text{sen } x^3 + \frac{1}{5}\text{sen } x^5 + C$, que es la solución de la integral pedida como ejemplo

Caso 2) Cuando el integrando es potencia par de seno o de coseno

Sea, con p $\in$ N: $\int \text{sen}^{2p} x\, dx =$ por propiedad de potencias $\int \left(\text{sen}^2 x\right)^p dx =$

usando si es seno ($\text{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$), o si es coseno ($\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$) conocidas del ángulo doble queda $= \dfrac{1}{2^p}\int (1-\cos 2x)^p\, dx$ o $= \dfrac{1}{2^p}\int (1+\cos 2x)^p\, dx$

Desarrollando el binomio en potencia p, queda para integrar una suma de potencias de 0 a p de cos 2x, siendo ellas de exponente par o impar. Para p de valores 0 y 1 resulta de integración inmediata.

De esa suma de potencias, los cosenos elevados a potencia impar, se resuelven como se vio para el caso 1), mientras que para los que resulten en potencia par, (la potencia mayor será la mitad de la original) se repite la forma descripta en el presente caso, hasta llegar a potencias inmediatas.

Ejemplo: Integrar: $\int \text{sen}^4 x\, dx$

$$\int \text{sen}^4 x\, dx = \int \left(\text{sen}^2 x\right)^2 dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \int (1-\cos 2x)^2 dx = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \int \left(1-2\cos 2x + \cos^2 2x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \text{sen } 2x + \int \cos^2 2x\, dx\right) = \quad (*)$$

Resolviendo ahora separadamente $\int \cos^2 2x\, dx$

$\int \cos^2 2x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\text{ sen } 4x + C$, reemplazada en (*), resuelve:

$$\int \text{sen}^4 x\, dx = \frac{1}{4}\left(x - \text{sen } 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\text{ sen } 4x + C\right) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\text{sen } 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\text{sen } 4x + C)$$

Caso 3) Cuando el integrando es producto de potencias de seno y coseno en que por lo menos una de ellas es impar

Sea $\int \text{sen}^{2p+1} x \cos^{2q} x\, dx$, con potencia de seno impar, siendo indistinto el grado del coseno

Se factorea en un grado la potencia impar (o la menor de ellas si ambas son impares), y se efectúan pasos análogos a los desarrollados en el primer caso:

$$\int \text{sen}^{2p} x \text{ sen } x \cos^{2q} x\, dx = \int \left(\text{sen}^2 x\right)^p \text{sen } x \cos^{2q} x\, dx = \int \left(1-\text{sen}^2 x\right)^p \text{sen } x \cos^{2q} x\, dx =$$

sustituyendo con $u = \text{sen } x \Rightarrow du = \cos x\, dx$ queda $= \int (1-u^2)^p\, u^{2q}\, du$

Desarrollando el binomio en su potencia p, y multiplicándolo por u^{2q} se tiene una expresión polinómica en variable u de integración inmediata.

Ejemplo: Integrar $\int \text{sen}^9 x \cos^3 x \, dx$

$$\int \text{sen}^9 x \cos^3 x \, dx = \int \text{sen}^9 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \text{sen}^9 x \left(1 - \text{sen}^2 x\right) \cos x \, dx =$$

sustituyendo con $u = \text{sen}\, x \Rightarrow du = \cos x \, dx$ queda $= \int u^9 (1 - u^2) \, du =$

$\int \left(u^9 - u^{11}\right) du = \frac{1}{10} u^{10} - \frac{1}{12} u^{12} + C$, y, devolviendo en variable original, queda:

$$= \frac{1}{10} \text{sen}^{10} x - \frac{1}{12} \text{sen}^{12} x + C$$

Caso 4) Cuando el integrando es producto de potencias pares de senos y cosenos

Sea $\int \text{sen}^{2p} x \cos^{2q} x \, dx$, donde ambos exponentes son pares

En este caso, la transformación es la misma que la efectuada en el caso 2) aplicada a ambas funciones con las fórmulas del ángulo doble.

$\int \text{sen}^{2p} x \cos^{2q} x \, dx = \int \left(\text{sen}^2 x\right)^p \left(\cos^2 x\right)^q dx =$ y recordando las relaciones del ángulo doble: $\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ quedarán siempre de la forma

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p \left(\frac{1}{2}\right)^q \int \left(1 - \cos 2x\right)^p \left(1 + \cos 2x\right)^q dx$$

La expresión de la integral, al desarrollar los binomios a las respectivas potencias resultará la suma de potencias de cos 2x , desde 0 hasta grado p + q.

Como en lo expuesto en el caso 2), las potencias de grado 0 y 1 son integrables inmediatamente, mientras que las restantes serán potencias pares o impares hasta el grado mencionado.

Para cada una de ellas se aplicará el criterio 1) ó 2) según corresponda, y deberá repetirse el procedimiento mientras sea necesario. Desde ya que es un procedimiento sumamente trabajoso, pero siempre resoluble metodológicamente.

Integración de fracciones racionales - Método de descomposición en Fracciones Simples

Se llama Fracción Racional a una expresión funcional de la forma: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

en la que P (x) y Q (x) son funciones polinómicas. En otras palabras, se llama fracción racional a una expresión que es el cociente de dos polinomios.

Si el grado del polinomio numerador P (x) es menor que el del polinomio denominador, se trata de una fracción racional propia, mientras que en caso contrario es una fracción racional impropia.

La designación anterior es correspondiente con la posibilidad de efectuar un cociente entre polinomios, ya que la fracción racional propia no admite la operación de división entre los polinomios que la componen, mientras que toda fracción racional impropia puede expresarse como la suma de un polinomio (cociente) más una fracción racional propia.

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$; $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es fracción racional impropia (admite división), mientras que $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ es fracción racional propia (no admite división)

C (x) es el cociente entre los polinomios P (x) y Q (x) mientras que R (x) es el resto de dicho cociente, desde ya de grado menor que el del divisor Q (x).

El propósito de este tema es la integración de fracciones racionales, por lo que el desarrollo del mismo tiene en cuenta únicamente las fracciones racionales propias, ya que siempre la fracción impropia es un polinomio más una fracción propia, y el polinomio cociente resulta integrable de inmediato.

La fracción racional propia es la que debe transformarse previamente para hacer posible la integración buscada. Ello es realizable, a partir del teorema que se enuncia sin demostración:

Teorema sobre la descomposición de fracciones racionales propias en fracciones simples:

Toda fracción racional propia puede expresarse como una suma de fracciones racionales propias más simples. El tipo o forma, y la cantidad de estas fracciones simples depende de las características de las raíces del polinomio denominador (sean reales o complejas), y del grado de multiplicidad de las mismas para cada caso.

Las fracciones simples a que se arriba, corresponderán a alguna o algunas de las formas que se indican a continuación. Queda claro que todas ellas son fracciones racionales propias:

I) $\dfrac{A}{x-a}$ con a, raíz real de Q(x) ; $A \in R$

II) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ con a , raíz real de Q(x) ; $A \in R$; $k \in N \wedge k > 1$

III) $\dfrac{A x + B}{x^2 + p x + q}$ con raíces del denominador complejas: ($p^2/4 - q < 0$) ; A y $B \in R$

IV) $\dfrac{A x + B}{(x^2 + p x + q)^k}$ con raíces del denominador complejas: ($p^2/4 - q < 0$);A y $B \in R$; $k \in N \wedge k > 1$

Cada una de las expresiones es integrable con distinto grado de dificultad, por alguno de los métodos ya desarrollados. Son muy simples las de forma I) y II), intermedia la de tipo III) y de dificultad muy laboriosa las de tipo IV), especialmente si k es grande. La resolución de cada una, con carácter general, es la siguiente:

I) $\int \frac{A}{x-a}\, dx = A \ln |x - a| + C$

II) $\int \frac{A}{(x-a)^k}\, dx = A\int (x-a)^{-k}\, dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$

III) $\int \frac{A\,x + B}{x^2 + p\,x + q}\, dx =$ operando $= \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) + (B - \frac{1}{2}Ap)}{x^2 + p\,x + q}\, dx =$

$$= \frac{1}{2}A\int \frac{2x + p}{x^2 + p\,x + q}\, dx + (B - \frac{1}{2}Ap)\int \frac{dx}{x^2 + p\,x + q} \quad (*)$$

Para este caso iii), de las integrales que resultan, la primera se realiza por sustitución, con $t = x^2 + p\,x + q$, (la primitiva es logaritmo natural), mientras que la segunda contiene la expresión del trinomio $x^2 + p\,x + q$ del denominador y se resuelve completando cuadrados como ya se ha visto (se llega a la forma $u^2 + 1$), y se llega a su primitiva que es arco tangente).

Lógicamente, con coeficientes concretos resulta operativamente más sencillo el cálculo operativo. De todas maneras, con lo dicho en el párrafo anterior, la expresión de la primitiva resultante de (*), es:

$$\frac{1}{2} A \ln\left|x^2 + px + q\right| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \text{ arc tg } \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}$$

IV) $\int \frac{A\,x + B}{(x^2 + p\,x + q)^k}\, dx =$ INT 1 + INT 2

Su integración es muy laboriosa, ya que no se resuelve en un solo paso, dependiendo el número de ellos, del grado del exponente k.

Inicialmente se fracciona en dos integrales INT 1 e INT 2, en forma similar a lo desarrollado en el tipo III).

Resulta así la primera de ellas, INT 1 de resolución por sustitución, pero la segunda INT 2, no es directa, sino que se transforma en una suma de una función y de otra integral similar en la que k tiene un grado menor.

Se repite el procedimiento para esta última integral y se sigue reduciendo en grado de k hasta que vale 1 y resulta integrable definitivamente.

Si bien no se proponen ejemplos con este último tipo, por estar fuera de nuestro objetivo, resulta una muy interesante práctica para quienes quieran desarrollarlas

Formas de descomposición de las fracciones racionales propias

Ya se dijo que la forma (o tipo) y cantidad de las fracciones simples en que quedará descompuesta la fracción racional propia a resolver, depende de la clase de raíces (reales o

complejas) y de su orden de multiplicidad. Lo desarrollamos para una fracción racional propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y analizamos los distintos casos según las raíces de Q

1) Raíces de Q(x) reales y distintas

Si son: a, b, c, ... n, las raíces reales y distintas del polinomio Q(x) de grado n, para cada raíz real le corresponde una fracción propia del tipo llamado I, con lo que su desarrollo total será de n fracciones, y se expresará como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots + \frac{N}{x-n}$$

2) Raíces de Q(x) reales y alguna o algunas múltiples

Sea Q(x) con todas las raíces reales: a de orden de multiplicidad α, b de orden de multiplicidad β, y así sucesivamente, y otras raíces simples a_1, b_1, c_1,... n_1.

Para cada una de las raíces reales múltiples le corresponde una fracción del tipo I, otras de tipo II con denominadores de potencias crecientes desde 2 hasta el orden de multiplicidad de cada raíz, y para cada una de las raíces simples le corresponde como antes una fracción de tipo I.

También en este caso el total de fracciones de ambos tipos es n, siendo n el grado del polinomio Q (x) y por ende número total de las raíces (reales en este supuesto) del mismo.

Quedará expresado de la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)} =$

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-b_1} + \dots + \frac{N}{x-n_1}$$

3) Raíces de Q(x) complejas distintas

Se supone que todos los pares de raíces complejas conjugadas son simples, obtenidas a partir de los trinomios: $x^2 + p_i x + q_i = 0$, con discriminante menor que cero $(p^2 - 4q < 0)$, y hay tambi{en otras raíces reales.

En esas condiciones, para cada par de raíces conjugadas, corresponde una fracción de tipo III, con independencia de las fracciones que pudieran corresponder por las raíces reales, simples o múltiples de las formas I y II.

Esto significa que si el polinomio tiene 2 m raíces complejas, o lo que es lo mismo, m pares de complejas conjugadas, corresponde para ellas, m fracciones tipo III. La forma de expresión es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{Cx+D}{x^2 + p_2 x + q_2} + \dots + \frac{Mx+N}{x^2 + p_n x + q_n} + \dots +$$

4) Raíces de Q(x) complejas y múltiples

Sean raíces complejas provenientes de los trinomios $x^2 + p_i x + q_i = 0$ con ordenes de multiplicidad α, β ..., y otras raíces reales y/o complejas no múltiples.

Para cada par de raíces complejas múltiples, le corresponde una expresión de tipo III y otras de tipo IV, las que tienen el trinomio respectivo como denominador, elevado desde la potencia 2 hasta la correspondiente a su orden de multiplicidad.

Como siempre, ello es independiente de las fracciones que correspondan a las otras raíces, reales o complejas simples.

Será de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{C_1 x + D_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + ... + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^\alpha} + ... +$$

$$+ ... + \frac{A_2 x + B_2}{x^2 + p_2 x + q_2} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + p_2 x + q_2)^2} + ... + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_2 x + q_2)^\beta} + ... +$$

En resumen: para cada raíz real, hay una fracción simple de tipo I ó II, igualando la cantidad de fracciones al de las raíces, tomando cada una con su orden de multiplicidad.

En cuanto a las raíces complejas, para cada par hay una fracción simple de tipo III ó IV, siendo la suma de estas fracciones la de los pares de raíces complejas, también con su grado de multiplicidad.

Operativamente, ante un problema determinado, y una vez en presencia de la fracción racional propia a resolver, se determinan la cantidad y clase de las raíces del polinomio denominador, en función de las cuales, y conforme lo desarrollado, se corresponderán las fracciones simples de distinto tipo.

La igualación de la fracción dada con la suma de la totalidad de las fracciones corresponde a una expresión, válida para todo valor de la variable x, similar a cualquiera de las expresadas.

Se deben calcular las constantes A, B, C, ... N, una por cada raíz del polinomio, real o compleja, totalizando n, grado del polinomio Q (x).

La determinación de dichas constantes se logra, asignando n valores distintos a la variable, con lo que se forma en general, un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, del cual se obtienen aquellas.

Normalmente constituye una simplificación elegir los valores de las raíces reales, con lo que se reduce el número de ecuaciones a resolver.

Reemplazadas en la expresión general, se procede a la integración de las fracciones simples así obtenidas.

Algunos ejemplos:

a) $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$ las raíces del denominador Q (x) son: -3 ; 0 ; +2

La forma de descomposición, con las raíces reales y distintas, es, en expresión válida para todo x;

(*) $\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2}$, y sumando estas fracciones, resulta:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{Ax(x-2) + B(x+3)(x-2) + C(x+3)x}{(x+3)x(x-2)}$$

Los denominadores son iguales, para todo x, por lo que los numeradores pueden igualarse, y asignar luego tres cualesquiera valores de x para obtener las incógnitas A, B, C.

$x+1 = Ax(x-2) + B(x+3)(x-2) + C(x+3)x$: tomando x igual a cada raíz, se simplifica mucho:

$$\text{si } x = -3 \Rightarrow -3+1 = A(-3)(-3-2) \Rightarrow -2 = 15A \Rightarrow A = -\frac{2}{15}$$

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow 0+1 = B(0+3)(0-2) \Rightarrow 1 = -6B \Rightarrow B = -\frac{1}{6}$$

$$\text{si } x = +2 \Rightarrow 2+1 = C(2+3)(2) \Rightarrow 3 = 10C \Rightarrow C = \frac{3}{10}$$

reemplazando las constantes en (*), y a su vez en la integral dada:

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx = -\frac{2}{15}\int\frac{dx}{x+3} - \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x} + \frac{3}{10}\int\frac{dx}{x-2}$$

$= -\frac{2}{15}\ln|x+3| - \frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| + C$, o, por propiedad de logaritmos

$$= \ln\left|K\,\frac{(x-2)^{3/10}}{(x+3)^{2/15}(x)^{1/6}}\right|$$

b) $\int \frac{3x+5}{x^3+x^2-x+1}\,dx$; las raíces del denominador Q (x) son: - 1 ; + 1 (doble)

La forma de descomposición, con raíces reales algunas múltiples, es, en expresión válida para todo x;

(*) $\frac{3x+5}{x^3+x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2}$ sumando el segundo miembro

$\frac{3x+5}{x^3+x^2-x+1} = \frac{A(x-1)^2 + B_1(x+1)(x-1) + B_2(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$ igualando numeradores:

$3x + 5 = A(x-1)^2 + B_1(x+1)(x-1) + B_2(x+1)$ se toma para x – 1, + 1, y el tercer valor el 0.

$$\text{si } x = -1 \Rightarrow 3(-1) + 5 = A(-1-1)^2 \Rightarrow 2 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\text{si } x = +1 \Rightarrow 3.1 + 5 = B_2(1+1) \Rightarrow 8 = 2B_2 \Rightarrow B_2 = 4$$

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow 0 + 5 = A(-1)^2 + B_1(1)(-1) + B_2(1) \Rightarrow 5 = A - B_1 + B_2 \Rightarrow 5 = \frac{1}{2} - B_1 + 4 \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2}$$

y, reemplazando en (*) y en la integral dada, obtenemos:

$$\int \frac{3x+5}{x^3 + x^2 - x + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$ = que son todas inmediatas =

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C = \ln\left|K\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right| - \frac{4}{x-1}$$

c) $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$, con raíces del denominador complejas, de los binomios $x^2 + 1$, y $x^2 + 2$

La forma de descomposición, con raíces complejas es, en expresión válida para todo x:

(*) $\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}$, sumando el segundo miembro

$\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}$, e igualando denominadores

$$\Rightarrow x^3 + x^2 + x + 2 = (Ax + B)(x^2 + 2) + (Cx + D)(x^2 + 1)$$

Se deben asignar cuatro valores de la variable, pero no hay raíces reales que son las que simplifican la resolución, por lo que debe plantearse el sistema, tomando números sencillos para x:

si x = 0 $\Rightarrow$ 2 = 2 B + D
si x = 1 $\Rightarrow$ 5 = 3 A + 3 B + 2 C + 2 D
si x = - 1 $\Rightarrow$ 1 = - 3 A + 3 B - 2 C + 2 D
si x = - 2 $\Rightarrow$ - 4 = - 12 A + 6 B - 10 C + 5 D

Obviamos, por conocida, la metodología de resolución del simple sistema así planteado, y se obtiene: A = 0 ; B = 1 ; C = 1 ; D = 0 , con lo que, reemplazando en la expresión (*) y en la integral propuesta, queda:

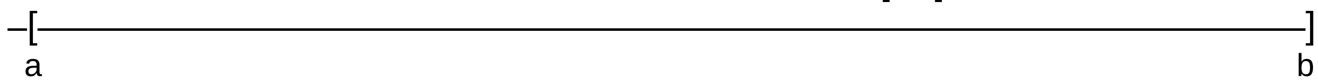
$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2+1)(x^2+2)}dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+2}$ = es inmediata la primera, y con sustitución elemental la segunda, ($u = x^2 + 2$), queda, finalmente:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}dx = \text{arc tg } x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C \quad \boxed{= \text{arc tg } x + \ln\left| K\sqrt{(x^2+2)}\right|}$$

Integral Definida

El concepto es aquí presentado en forma estrictamente teórica, expresamente desarrolado sin ayuda de interpretaciones gráficas, para evitar que posteriormente pueda perderse de vista la concepción básica del tema, porque es muy corriente vincularlo erróneamente con su aplicación más clásica que es el cálculo de áreas planas.

Sea entonces, una función f continua en un intervalo cerrado [a,b]

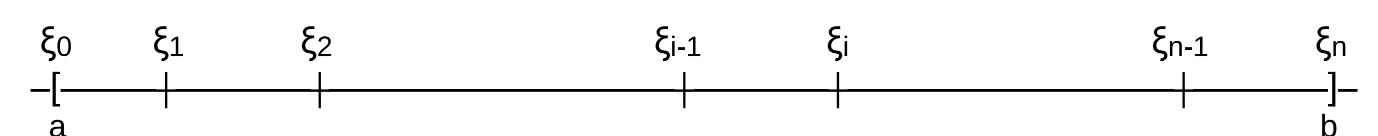


Se efectúa una partición cualquiera del intervalo [a,b], lo que equivale a subdividirlo en n subintervalos llamados h_1, h_2, ... h_i, ... h_n, que sumados constituyen el total [a,b]. Los subintervalos tienen dimensiones arbitrarias y no necesariamente iguales en su longitud.

Llamamos norma de la partición, λ, a la extensión de la mayor de las longitudes de los subintervalos h_i.

Esta partición se materializa con n - 1 puntos interiores a [a,b], que se indican como ξ_1, ξ_2, ... ξ_i, ... ξ_{n-1} , llamando ξ_0 al extremo a, y ξ_n al extremo b. Se verifica que:

$a \equiv \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{i-1} < \xi_i < \ldots < \xi_{n-1} < \xi_n \equiv b$



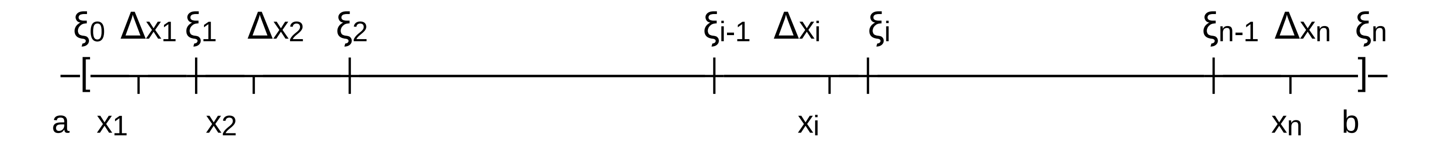
A la longitud de cada intervalo h_i se la llama Δx_i , siendo cada valor genérico: $\Delta x_i = \xi_i - \xi_{i-1}$

Además se cumple, con el concepto de partición, que:

$h_1 + h_2 + \ldots + h_i + \ldots + h_n = b - a = [a,b]$ o lo mismo:

$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_i + \ldots + \Delta x_n = b - a$, que expresamos $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a = [a,b]$

Se considera ahora un punto arbitrario x_i para cada uno de los subintervalos h_i, ubicado en cualquier posición dentro del mismo.



Si se efectúa el producto de cada una de las longitudes de los intervalos Δx_i por el valor que toma la función f en el respectivo punto arbitrario dentro del mismo subintervalo, $f(x_i)$, resulta $f(x_i).\Delta x_i$, y si se suman todos los productos así obtenidos, llamando S_n a esa suma, se tiene:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + ... + f(x_i)\Delta x_i + ... + f(x_n)\Delta x_n$$

Esa suma es de n términos, siendo n el número arbitrario de partes en que se efectuó la partición de [a,b].

Importa tener presente que en el procedimiento descripto, es también arbitraria la dimensión de cada subintervalo, como asimismo la ubicación del punto x_i correspondiente a cada uno.

Si se aumenta indefinidamente el número de partes n en que se efectúa la partición de [a,b], de manera tal que simultáneamente la norma λ se hace infinitamente pequeña, lo que equivale a decir que se hace que n tienda a infinito y λ tienda a cero: $n \to \infty$, $\lambda \to 0$.

Con esas hipótesis planteadas, enunciamos, sin demostración:

1) que existe el límite: $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (\lambda \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x_i$

2) que ese límite es finito y único, e independiente de la cantidad y forma en que se efectúen las sucesivas particiones de [a,b], y de la forma en que se ubique en cada caso el punto x_i dentro de cada subintervalo.

Al mismo se lo llama integral definida de la función f, respecto de la variable x, desde x = a hasta x = b, y se simboliza:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (\lambda \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x_i$$

Los elementos del símbolo de la integral definida son:

$\int$ el símbolo de la integral;

f(x), el integrando;

a, b, los límites de integración inferior y superior respectivamente

Se ha definido entonces, la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado [a,b], como el límite de la sumatoria de los productos del valor de la función en un punto cualquiera de un subintervalo de una partición arbitraria de [a,b], por la longitud del respectivo subintervalo, cuando el número de los elementos de la partición tiende a más infinito, mientras la norma de la misma tiende a cero.

Propiedades de la Integral Definida

Sus demostraciones no se detallan, por ser elementales, a partir de la definición y con los conceptos de álgebra de funciones y de sumatoria.

1) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

3) $\int_a^b C\, f(x)\, dx = C\int_a^b f(x)\, dx$

4) $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$

5) $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$

La Integral Definida permite desarrollar varios teoremas de suma importancia en el cálculo integral que en definitiva permitirán vincular este concepto con el de la Integral Indefinida y finalmente poder calcular el valor concreto de las mismas, y desarrollar a partir de ello las innumerables aplicaciones de la integral.

Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

El valor de la integral definida de una función f en un intervalo cerrado [a,b], es igual a la medida (o extensión) del intervalo [a,b], por el valor de la función f en un punto x_0 interior a dicho intervalo. En símbolos:

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f(x_o) \qquad \text{siendo: } a < x_0 < b \quad \text{(tesis)}$$

La demostración distingue según la función f sea constante o no.

1) Si f(x) = C (constante) : Por definición de Integral Definida, se deduce en seguida la tesis:

$$\int_a^b C\, dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} C\, \Delta x_i = C \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = C\,(b-a)$$

(tesis, se cumple para todo x_0 del intervalo)

2) Si f (x) ≠ C (no constante) : Por ser f continua en [a,b], condición requerida para la definición de la Integral Definida, se cumple para la misma el Teorema de Weierstrass, existiendo un valor máximo absoluto M, y un mínimo absoluto m en el intervalo [a,b].

Dado que el resultado de la integral definida es independiente de la partición que se haga para el intervalo, será siempre posible establecerla adecuadamente, con elección igualmente conveniente de los puntos x_i interiores, de manera que se verifique en cada uno de los subintervalos h_i, que: $m < f(x_i) < M$, y multiplicando miembro a miembro por $\Delta x_i > 0$, se tiene que: $m\, \Delta x_i < f(x_i)\, \Delta x_i < M\, \Delta x_i$, que es una expresión válida para cada subintervalo, y finalmente planteando la sumatoria de todas las expresiones similares, desde 1 hasta n, nos queda:

$$\sum_{i=1}^{n} m\,\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} M\,\Delta x_i$$

y pasando al limite cuando n $\to + \infty$ y con el concepto de integral definida, se tiene

$m\int_a^b dx < \int_a^b f(x)\,dx < M\int_a^b dx$, y como $\int_a^b dx = (b-a)$, se tiene, reemplazando, que:

$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a)$, y dividiendo por b - a > 0, resulta :

$$m < \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} < M$$

Precisamente m y M son los valores mínimo y máximo absolutos de la función f en el intervalo [a,b], por lo que el valor de la expresión: $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ es un valor intermedio a los extremos M y m, lo que asegura por el Teorema del Valor Intermedio, que lo toma la función f en por lo menos un punto x_o interior al intervalo [a,b], o sea que, en definitiva, existe un $x_o \in (a,b)$ para el que se cumple que: $f(x_0) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ con $m < f(x_0) < M$: y simplemente trasponiendo términos, tenemos demostrada la tesis : $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(x_o)$

Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Este teorema permite a partir del mismo, establecer la vinculación entre la integral definida y las primitivas del integrando, y a partir de ello, proceder al cálculo del valor de las integrales definidas.

Sea una función F (x), cuya variable es el extremo superior de una integral definida en la que su integrando es una función f : $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$

Donde, lógicamente, el valor de la integral definida dependerá de la función f integrando y de los extremos de integración, (siendo precisamente variable el extremo superior), con independencia de la nominación de la variable que se indique para la función f.

No obstante, a los efectos del desarrollo del teorema, se indicará con otra variable, t por ejemplo, a la variable del integrando, para facilitar la comprensión, aunque conceptualmente se podría seguir expresando también con x. El teorema expresa que :

i) La función F así definida es derivable, y ii) Se cumple que $F' = f$

Para la demostración, se aplica la definición de derivada a la función F en un punto genérico x

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$ = reemplazando $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x}$$ = por propiedad de la integral definida

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt}{\Delta x}$$ = también por propiedad de la integral definida

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}$$ = aplicando el teorema del valor medio del cálculo integral al numerador

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x . f(t_0)}{\Delta x} \quad (\text{con } x < t_0 < x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(t_0)$$, y con el límite cuando $\Delta x \to 0$:

si $\Delta x \to 0 \Rightarrow x + \Delta x \to x \Rightarrow x < t_0 < x + \Delta x \Rightarrow x < t_0 < x \Rightarrow t_0 \to x$ con lo que, queda:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(t_0) = f(x)$$ Que verifica las tesis: F es derivable, y su derivada es f.

Regla de Barrow

Es precisamente a partir del Teorema Fundamental del Cálculo que se puede demostrar la Regla de Barrow, a veces llamada por sí sola el Teorema Fundamental, que enunciada como teorema, expresa:

Sea f(x) una función continua en [a,b], y G(x) una función primitiva cualquiera de f(x), con lo que $G'(x) = f(x)$. Entonces, se verifica que la integral definida de la función f(x) para el intervalo [a,b] es igual a la diferencia entre los valores de la primitiva G(x) entre los extremos del intervalo.

En símbolos: Si $G'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$

La demostración parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral: $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$,

y como se demostró que : $F'(x) = f(x)$, resulta que : $\int_a^x f(x)\,dx$ es una primitiva de la función f(x)

Como por hipótesis G(x) es también una primitiva de f(x), ambas primitivas difieren en una constante, con lo se cumple que:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx = G(x) + C$$ (1), expresión válida para todo x

si x = a: $\int_a^a f(x)\,dx = G(x) + C = 0$ (por propiedad de ID) con lo que $C = -G(a)$, y reemplazada en (1): $\int_a^x f(x)\,dx = G(x) - G(a)$, y si x = b: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$,que es la Formula o Regla de Barrow $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)}$

Siendo G(x) una primitiva cualquiera de f(x). Su utilización permite calcular el valor o resultado de las integrales definidas. Ejemplos:

1) Calcular $\int_1^4 (3x^2 - 6x + 2)\,dx =$

$(x^3 - 3x^2 + 2x)\Big|_1^4 = (64 - 48 + 8) - (1 - 3 + 2) = 24$

2) Calcular $\int_0^{2\pi} \text{sen } x\,dx = (-\cos x)\Big|_0^{2\pi} = (-1) - (-1) = 0$

3) Calcular $\int_{-5}^{-1} \frac{8\,dx}{x^3} = (-\frac{4}{x^2})\Big|_{-5}^{-1} = (-4) - \left(-\frac{4}{25}\right) = -\frac{96}{25}$

Como surge de los ejemplos de aplicación de la Regla de Barrow, el resultado numérico del cálculo de una integral definida puede dar como resultado indistintamente un número negativo, positivo o cero.

Ese resultado es el obtenido a partir del concepto dado en su definición, y como tal, es posible.

No debe confundirse esto en el caso de que se trate de una aplicación de la integral definida, ya que, el valor obtenido tendrá un determinado significado conforme la interpretación que corresponda.

Integrales Impropias

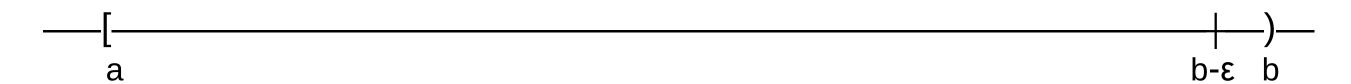
El concepto de Integral Definida considera como hipótesis la existencia de una función f continua en un intervalo cerrado [a,b].

Es posible extender el concepto así propuesto para los casos en que la función f sea seccionalmente continua en [a,b], presentando discontinuidades en uno o más puntos de [a,b], o cuando alguno o ambos extremos del intervalo de integración sea infinito.

Analizando separadamente ambas situaciones posibles, en las que no se cumplen las condiciones establecidas en la definición del concepto de integral definida, se puede considerar:

a) Discontinuidad de f en [a,b]

i) Suponiendo que la función f sea continua en [a,b), presentando discontinuidad únicamente en el extremo derecho b. ε



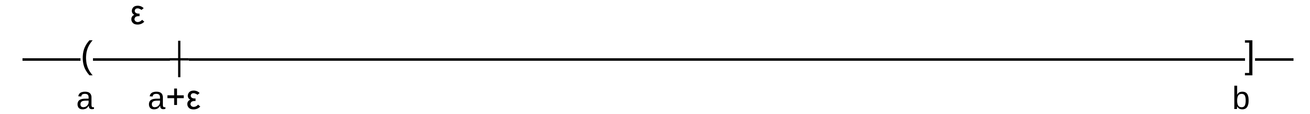
Si la función f es continua en el intervalo semiabierto [a,b), obviamente será continua en el intervalo cerrado [a,b-ε], con ε > 0.

Por ello, f cumple en ese intervalo, la condición necesaria para la existencia de la integral definida en él, con lo que existe: $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, tendrá sentido, y será válida para cualquier ε > 0.

Este concepto, extendido al de límite cuando ε tiende a cero, permite definir la llamada integral impropia de la función f en el intervalo [a,b). Será:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad (\text{si este límite existe})$$

ii) Suponiendo que la función f sea continua en (a,b], presentando discontinuidad únicamente en el extremo izquierdo a.



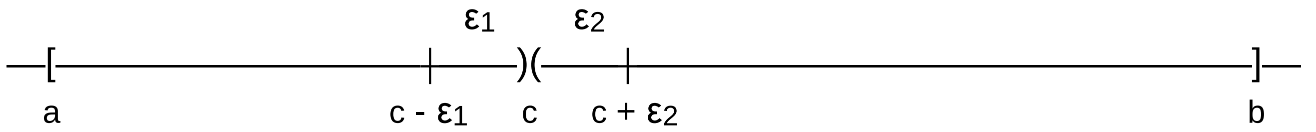
Lógicamente, f es continua en [a+ε,b], con ε > 0, y existe la integral definida:

$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, y tendrá sentido, y será válida para cualquier ε > 0.

Y, también en forma similar, se define la integral impropia de la función f en el intervalo (a,b], ahora como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad (\text{si este límite existe})$$

iii) Si la función presenta un punto de discontinuidad en c ∈ (a,b), mientras que es continua en [a,c) y en (c,b], resulta una simple extensión de los conceptos precedentes, considerar el intervalo [a,b], subdividido, y proceder como si la función fuera discontinua en cada subintervalo.

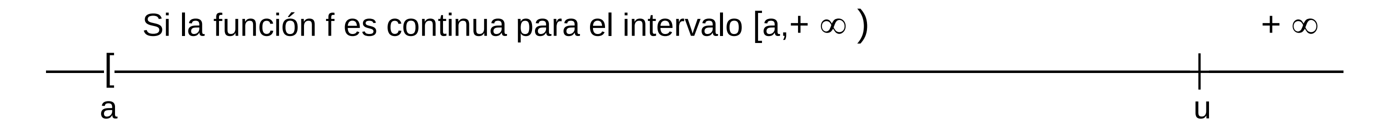


Con los razonamientos anteriores, es simple ver que: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \int_{c-\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx \quad (\text{si existen, finitos, ambos límites})$$

b) Extremo o extremos de integración infinitos

Si la función f es continua para el intervalo [a,+ ∞)



Razonamiento similar a los efectuados, nos permiten expresar la integral definida para un intervalo cerrado [a,u], en que f es obviamente continua, y plantear entonces, la integral definida: $\int_a^u f(x)\,dx$, con validez para cualquier valor de u finito

En forma conceptualmente similar a las formas anteriores, se expresa la integral impropia de la función f en el intervalo [a,+ ∞) :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_a^u f(x)\,dx \text{ (si el límite existe finito)}$$

Análogamente, si la continuidad de f se verifica en (-∞,b]:

- ∞

u b

Será ahora la integral impropia: $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty} \int_u^b f(x)\,dx$

Si se trata de la continuidad en el intervalo (- ∞,+ ∞), se subdivide simplemente considerando un punto cualquiera c, de manera de expresar:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u_1\to-\infty} \int_{u_1}^{c} f(x)\,dx + \lim_{u_2\to+\infty} \int_{c}^{u_2} f(x)\,dx$$

(si existen con límite finito ambos límites)

En las definiciones dadas para las distintas formas de integrales impropias, se aclara siempre que la misma requiere que exista el límite, finito que se plantea para cada uno de los casos.

Si ese límite es infinito o no existe, se suele decir, según autores, que la integral impropia es divergente o directamente que la misma no existe.

Algunos ejemplos de cálculo de integrales impropias:

$$\text{a)} \int_0^3 \frac{dx}{9-x^2} = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{9-x^2} = \lim_{\varepsilon\to0^+} \text{arc sen } \frac{1}{3}x \Big|_0^{3-\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \text{arc sen } \frac{3-\varepsilon}{3} - \text{arc sen } 0 = \text{arc sen } 1 - 0 = \frac{\pi}{2}$$

b) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{x\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} =$

$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} \Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} \Big|_{1+\varepsilon}^4$

$= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\sqrt[3]{(x-1)^2} \Big|_0^{1-\varepsilon} + \sqrt[3]{(x-1)^2} \Big|_{1+\varepsilon}^4 \right]$

$= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\sqrt[3]{(1-\varepsilon-1)^2} - \sqrt[3]{(0-1)^2} + \sqrt[3]{(4-1)^2} - \sqrt[3]{(1+\varepsilon-1)^2} \right]$

$= \frac{3}{2} \left(0-1+\sqrt[3]{9}-0\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9}-1\right)$

c) $\int_0^{+\infty} e^{-4x}\,dx = \lim_{u\to +\infty} \int_0^u e^{-4x}\,dx = \lim_{u\to +\infty} \left[-\frac{1}{4}\left(e^{-4u}-1\right)\right]_0^u = +\frac{1}{4}$

d) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x} = \lim_{u\to -\infty} \int_u^{-1} \frac{dx}{x} = \lim_{u\to -\infty} | x |_u^{-1} = \lim_{u\to -\infty} \left(\ln 1 - \ln| u |\right) = -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ con este resultado, la integral impropia no existe (o se dice que es divergente)

Aplicaciones de la Integral Definida

La Integral Definida es la herramienta a través de la cual se desarrollan las aplicaciones de la integral.

Existen numerosas formas de utilizarla en la resolución de problemas concretos de los campos de distintas disciplinas de la matemática, física, economía, biología y otras, de las cuales se desarrollarán solamente algunas en lo que sigue.

Área de figuras planas

La aplicación más sencilla y corriente de la integral definida es el cálculo de áreas de figuras planas, y precisamente esta aplicación se desarrolla a partir de la interpretación geométrica de la integral definida.

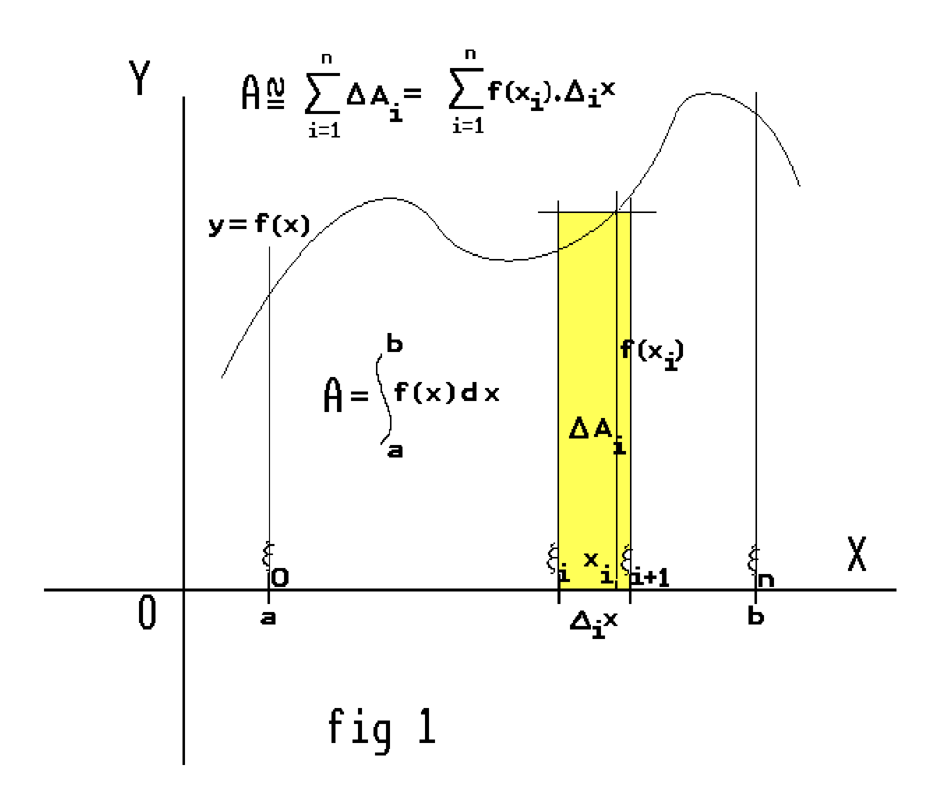


fig 1

El concepto de Integral Definida requiere la continuidad de la función f(x) en el intervalo cerrado [a,b].

Si se agrega la condición de que la misma no sea negativa en el intervalo, $f(x) \geq 0$, se tiene una gráfica como la de la figura 1.

Si ahora se efectúa la partición del intervalo y las restantes consideraciones correspondientes dadas, cada uno de los productos formados entonces: $f(x_i).\Delta_i x$ tiene una simple y clara interpretación geométrica: es el área del rectángulo de base $\Delta_i x$ (medida de la longitud del subintervalo i) y de altura $f(x_i)$ (valor de la función f en el punto arbitrario x_i del mismo).

Llamando ΔA_i al área de cada uno de los rectángulos representativos de los respectivos productos, la suma de los n factores será la suma de las n áreas elementales ΔA_i , que aproximadamente será el área A comprendida entre la gráfica de la función f(x), el eje de las abscisas y las rectas correspondientes a los extremos del intervalo x = a, y x = b.

Lógicamente, esa aproximación será mayor cuanto mayor sea el número n de subintervalos, y con la norma de la partición correspondientemente menor.

El área A será entonces, exactamente el límite de las sumas elementales ΔA_i cuando n tiende a $+\infty$, y λ tiende a cero, que es, precisamente la integral definida de f en el intervalo [a,b].

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta_i x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Por ello, la interpretación geométrica de la Integral Definida de la función y = f(x) no negativa en el intervalo c, es el área comprendida entre la gráfica de la función, las rectas x = a, x = b , y el eje de las abscisas.

Ya se ha dicho que el resultado de una integral definida es un número real cualquiera, positivo, negativo o nulo, mientras que el área siempre es positiva.

Cuando se trata de una aplicación concreta, deberá ser del signo correspondiente a la misma. Es por ello que en la interpretación geométrica de la Integral Definida, se agregó el requerimiento de f(x) ≥ 0.

Si se trata de calcular el área entre la curva de una función negativa, con gráfica por debajo del eje de las x, los productos $f(x_i).\Delta_i x$ serán de signo negativo por serlo en ese caso el valor de la función $f(x_i)$, y la integral definida resultará de signo negativo, incompatible con el concepto de área buscado.

Es por eso que si el intervalo es tal que la función permanece negativa o nula en el mismo, se afecta con el factor -1 a la expresión de la integral definida para ese intervalo.

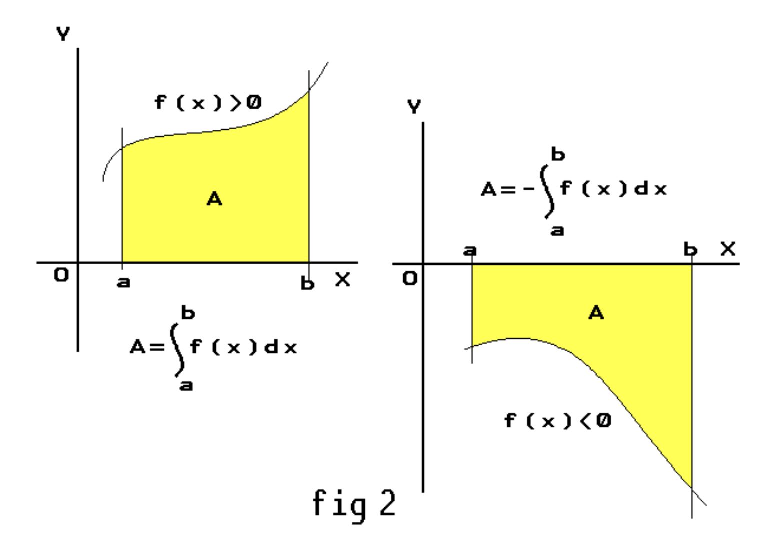


fig 2

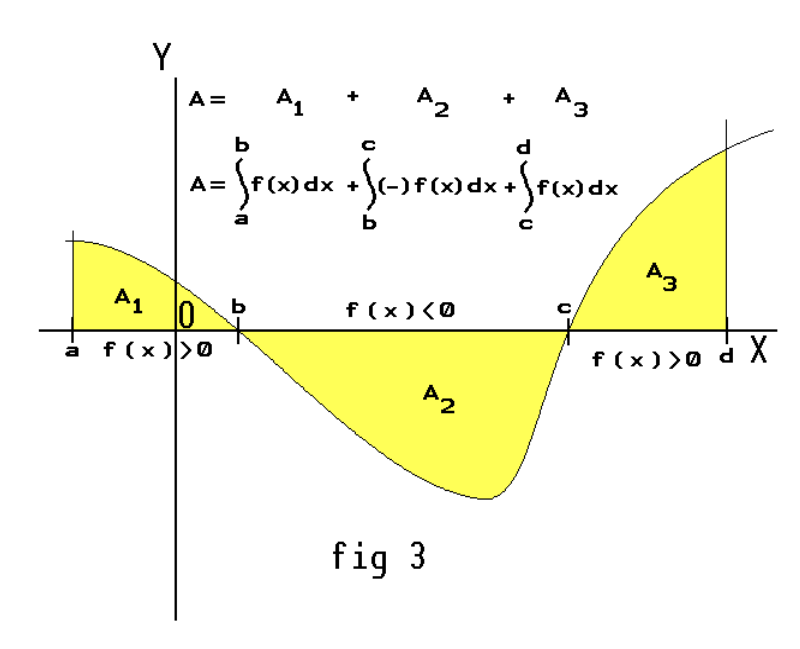


fig 3

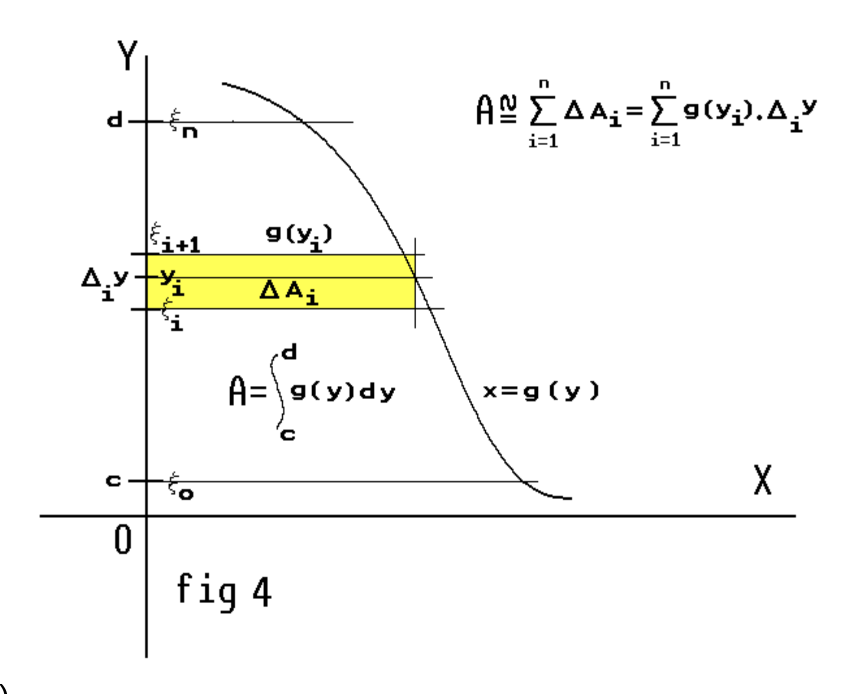
Si f(x) ≤ 0 en [a,b], el área entre la gráfica de la función, el eje x, y las rectas correspondientes a los extremos del intervalo, será entonces : (fig 2)

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Entonces, para el cálculo del área plana comprendida entre la gráfica de una función, el eje x y las rectas perpendiculares al mismo en los extremos del intervalo, se deben determinar previamente los intervalos de positividad y negatividad de la función, para calcular el área por tramos, y efectuar la suma de las partes, tal como se ejemplifica en la figura 3.

Área comprendida entre la gráfica de la función y el eje de las ordenadas.

En forma exactamente análoga se puede plantear el problema del cálculo del área entre la gráfica de la función, el eje de las ordenadas y dos rectas correspondientes a un intervalo sobre dicho eje.



Para ello, se expresa la función inversa, considerando ahora la variable y, o sea: x = g (y), requiriendo que se verifique que g(y) ≥ 0 en [c,d].

Efectuando la partición de este intervalo y con el mismo razonamiento efectuado para el eje x, se obtiene el área buscada como la integral definida obtenida ahora como el límite de la sumatoria de los productos $g(y_i).\Delta_i y$, (área de los respectivos rectángulos ahora horizontales) cuando n tiende a infinito, y la norma tiende a cero. (fig 4).

Queda expresada entonces así: $A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} g(y_i).\Delta_i y = \int_c^d g(y)\, dy$

Si no se cumple para todo el intervalo la condición g(y) ≥ 0 , deben establecerse los intervalos en que la misma es positiva o negativa, y se resuelve tal como lo desarrollado para la integración sobre el eje x.

Área encerrada entre curvas

Sea ahora el problema de hallar el área plana encerrada entre las gráficas de dos (o más) funciones f(x) y g(x), tales como las representadas en la figura 5 de la página siguiente.

La primera determinación a efectuar son las intersecciones entre las curvas, en este caso los puntos M y N, por los procedimientos algebraicos corrientes, determinándose las coordenadas de los mismos.

Las características de cada caso determinarán la forma más conveniente de resolver el problema, optándose por integrar considerando intervalos a lo largo del eje x o del eje y.

Siempre será posible resolverlo de ambas formas, con tal de considerar el intervalo correspondiente que abarque la totalidad del área a calcular, y tener en cuenta, si fuera necesario, las distintas funciones a lo largo del mismo.

En el ejemplo de la figura, resulta más sencillo considerar el intervalo $[x_1,x_2]$, sobre el eje de las x, lo que significa integrar a lo largo del eje de las abscisas.

Con el razonamiento corriente, de efectuar la partición del intervalo $[x_1,x_2]$, se obtienen franjas rectangulares verticales, de base $\Delta_i x$ para cada subintervalo, y de alturas $[f(x_i) - g(x_i)]$, siendo f la función mayor y g la función menor en el intervalo, lo que representa $f(x) \geq g(x)$, $\forall$ x $\in$ [a,b].

Cada rectángulo elemental tiene como siempre área ΔA_i.

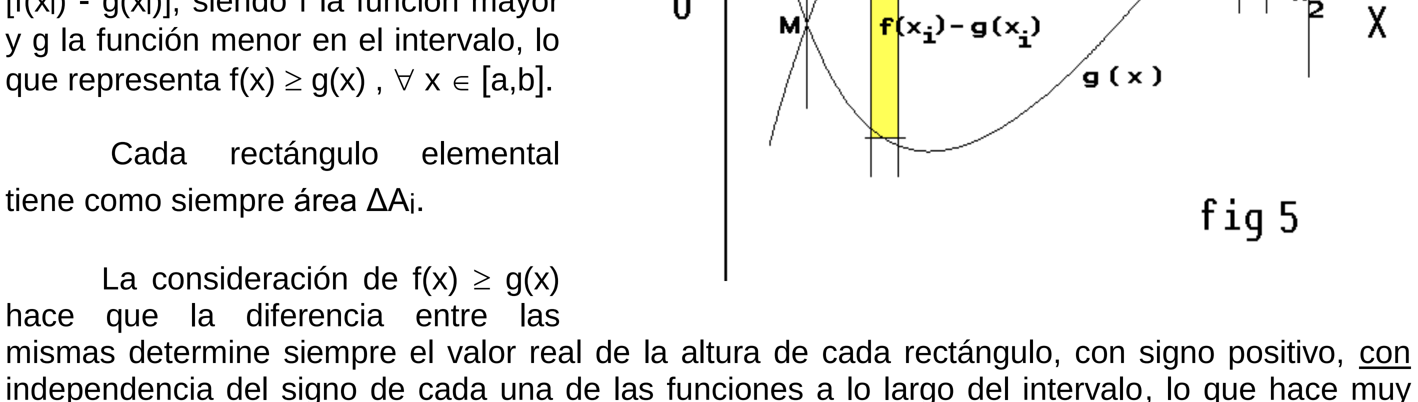


fig 5

La consideración de $f(x) \geq g(x)$ hace que la diferencia entre las mismas determine siempre el valor real de la altura de cada rectángulo, con signo positivo, <u>con independencia del signo de cada una de las funciones a lo largo del intervalo</u>, lo que hace muy simple el cálculo, al no necesitarse la determinación de los intervalos de positividad de las mismas.

Si son ambas de signo positivo en el subintervalo, es lógico que la diferencia entre ambas tiene signo positivo (subintervalo j en la figura).

Si la mayor es positiva y la menor es negativa, la resta indicada hace que el resultado sea igualmente positivo y de la longitud del rectángulo (subintervalo i en la figura)

Igual situación se verifica si ambas son negativas en el subintervalo, obteniéndose resultado positivo si la resta se efectúa en el orden correcto: función superior (f en el gráfico) menos función inferior (g en el gráfico), cada una con su respectivo signo.

Como siempre, la suma de los rectángulos provenientes de la partición efectuada es aproximadamente el área que se desea calcular.

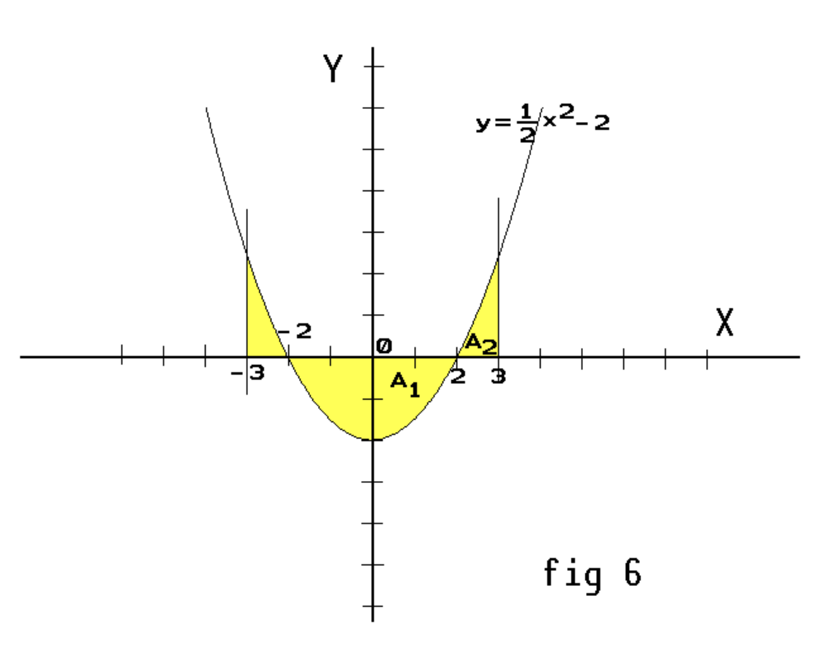
$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) - g(x_i) \right] \Delta_i x$$

Con el razonamiento ya aplicado, de aumentar el número de elementos n de la partición, se aumenta la aproximación entre la sumatoria y el área encerrada entre las curvas.

Considerando el límite cuando n tiende a infinito con la norma tendiendo a cero, y con el concepto de Integral Definida, se puede expresar finalmente:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - g(x) \right] dx, \quad \text{siendo } f(x) \geq g(x) \ \forall x \in \left[x_1, x_2 \right]$$


Algunos ejemplos:



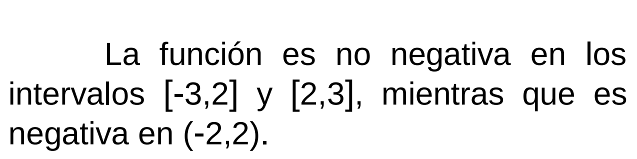
1) Calcular el área encerrada entre las gráficas de las ecuaciones:

$y = \frac{1}{2} x^2 - 2$;

$y = 0$ (eje x) ;

$x = -2$;

$x = 2$ (figura 6)


La función es no negativa en los intervalos [-3,2] y [2,3], mientras que es negativa en (-2,2).

La aplicación de lo desarrollado determina que el área buscada está dada por la suma de las integrales definidas que tienen en cuenta precisamente los signos de la función en cada parte del intervalo total.

$$A = \int_{-3}^{-2} \left(\frac{1}{2} x^2 - 2 \right) dx - \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2} x^2 - 2 \right) dx + \int_{2}^{3} \left(\frac{1}{2} x^2 - 2 \right) dx$$

Puede simplificarse algunas veces el cálculo utilizando las simetrías. Aquí el área sombreada puede calcularse como el doble de las indicadas como A_1 y A_2 en la figura.

De esta manera, el área se calcula como:

$$A = 2 \left[-\int_{0}^{2} \left(\frac{1}{2} x^2 - 2 \right) dx + \int_{2}^{3} \left(\frac{1}{2} x^2 - 2 \right) dx \right]$$

Desarrollando el resultado:

$$A = 2 \left[\left(-\frac{1}{6} x^3 + 2x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{1}{6} x^3 - 2x \right) \Big|_2^3 \right] =$$

$$= 2 \left[\left(-\frac{4}{3} + 4 \right) - (0) + \left(\frac{27}{6} - 6 \right) - \left(\frac{4}{3} - 4 \right) \right] =$$

$$= 2 \left[\frac{8}{3} - \frac{3}{2} + \frac{8}{3} \right] = 2 \left(\frac{23}{6} \right) = \frac{23}{3} \text{ u.a. } (\textit{unidades de área}).$$

2) Calcular el área encerrada entre las gráficas de las curvas:

recta: $y = 2x - 4$

parábola: $y^2 = 4x$

En primer lugar se determinan las coordenadas de los puntos que corresponden a la intersección de ambas curvas, lo que es obtenible inmediatamente a partir de la igualación de cualquier variable entre las ecuaciones de las mismas.

Se obtienen en este caso los puntos A:(1,-2) y B:(4,4).

El área podrá determinarse, integrando sobre el eje x o sobre el eje y, considerando intervalos de integración sobre cualquiera de los ejes.

Normalmente resulta con mayor o menor dificultad una u otra forma, y siempre se debe tener en cuenta el intervalo total a recorrer y las curvas a considerar en el mismo.

Aquí como simple práctica lo desarrollaremos de las dos formas posibles:

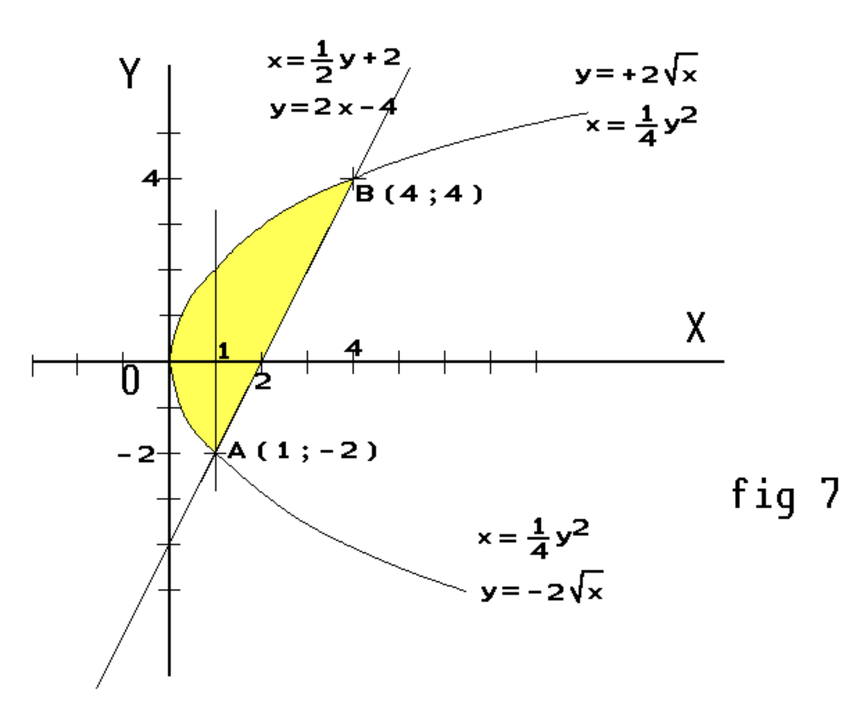


fig 7

i) Integrando sobre el eje y

Esto requiere expresar las ecuaciones dadas de manera que "y" sea la variable, y "x" la función, lo que resultan: Recta: $x = \frac{1}{2}\,y + 2$; Parábola: $x = \frac{1}{4}\,y^2$

La forma general de expresión del área buscada es:

$$A = \int_c^d \left[f^{-1}(y) - g^{-1}(y) \right] dy, \qquad \text{teniendo en cuenta que } f^{-1}(y) \geq g^{-1}(y)$$

En este caso, el intervalo es [-2,4], y en el mismo, la función recta es mayor que la función parábola, lo que determina como expresión:

$$A = \int_{-2}^{4} \left[\left(\frac{1}{2}y + 2 \right) - \left(\frac{1}{4}y^2 \right) \right] dy = \left[\frac{1}{4}y^2 + 2y - \frac{1}{12}y^3 \right]_{-2}^{4} = 9 \text{ u.a.}$$

ii) Integrando sobre el eje x

En este caso se observa que la totalidad del área, correspondiente al intervalo total [0,4], debe subdividirse según los intervalos [0,1] y [1,4], ya que para cada uno de ellos el área buscada se encuentra entre dos curvas diferentes.

En el intervalo [0,1] se deben considerar las dos ramas de la parábola: $+2\sqrt{x}$, y $-2\sqrt{x}$, mientras que en el intervalo [1,4], las curvas correspondientes son la rama superior de la parábola, $+2\sqrt{x}$, y la recta 2 x - 4. En consecuencia, la expresión del área resulta:

$$A = \int_0^1 \left[+2\sqrt{x} - (-2\sqrt{x}) \right] dx + \int_1^4 \left[+2\sqrt{x} - (2x - 4) \right] dx$$

$$A = \left. \left(\frac{8}{3}\sqrt{x^3} \right) \right|_0^1 + \left. \left(\frac{4}{3}\sqrt{x^3} - x^2 + 4x \right) \right|_1^4 = \text{ 9 unidades de área.}$$

Áreas Planas en Coordenadas Polares

Se trata ahora de determinar un área plana encerrada entre la gráfica de una curva de ecuación $\rho = \rho(\theta)$, en coordenadas polares, en un determinado intervalo de la variable θ, por ejemplo $[\theta_1,\theta_2]$, lo que significa limitar el área entre la curva y las rectas correspondientes a los ángulos extremos del intervalo (figura 8).

A efectos de calcular el área buscada, se efectúa un razonamiento absolutamente análogo al realizado para las coordenadas cartesianas:

Se particiona el intervalo $[\theta_1,\theta_2]$ en n subintervalos, indicándose para simplicidad de la figura únicamente el genérico "i" , de dimensión $\Delta_i\theta$.

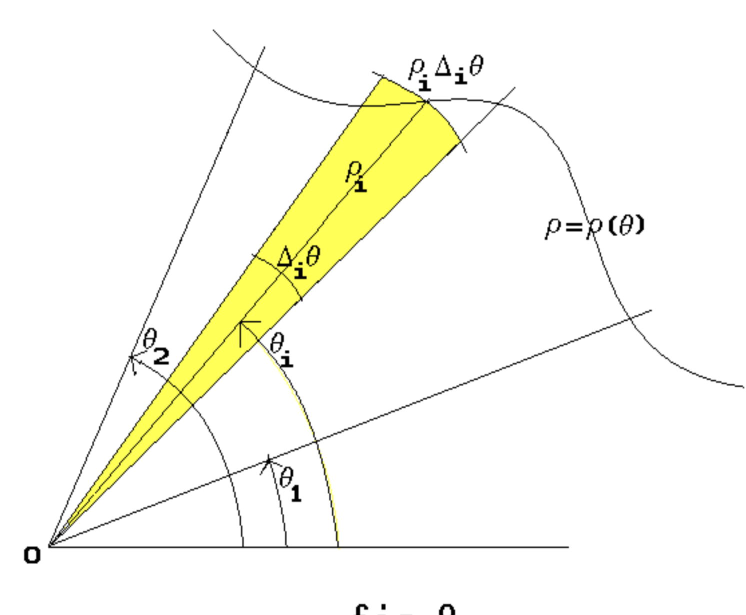


fig 8

Para cada subintervalo, se establece en el mismo un valor arbitrario de la variable, llamado θ_i (equivalente en cartesianas al x_i) para el genérico $\Delta_i\theta$ (antes $\Delta_i x$), en el que la función tomará el valor respectivo ρ_i (equivalente al $f(x_i)$ en cartesianas).

Con esta similitud de razonamiento, se mantiene constante el valor de la función ρ_i a lo largo del intervalo $\Delta_i\theta$, lo que

determina un arco de circunferencia, (antes un segmento paralelo al eje de la variable) que encierra como área elemental un sector circular de área ΔA_i (equivalente al rectángulo cartesiano).

En consecuencia, el área buscada es también aproximadamente la suma de las áreas elementales de todos los subintervalos, n sectores circulares de área ΔA_i.

El área del sector circular es la mitad del producto del radio por el arco del mismo, siendo la longitud del arco, a su vez, el producto del radio por el ángulo del sector expresado en radianes. lo que lleva a la forma:

$\Delta A_i = \frac{1}{2}.(\text{radio}).(\text{arco}) = \frac{1}{2}.\rho_i.\rho_i\ \Delta_i\theta = \frac{1}{2}.\rho^2_i.\Delta_i\theta$, lo que permite expresar el área total aproximadamente como: $A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2.\Delta_i\theta$

Como siempre, la aproximación será mayor, al aumentar el número n de partes en que se efectúa la partición, expresándose el valor exacto para el límite tendiendo a infinito, con similitud a lo ya hecho antes.

El concepto de límite infinito permite expresar entonces el área como aplicación de la integral definida, de manera que: $A = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2.\Delta_i\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2\ d\theta$

La anterior es la expresión correspondiente a la integral definida como aplicación al cálculo de áreas en coordenadas polares, y es la que nos permite determinar la encerrada entre la gráfica de la curva genérica $\rho = \rho(\theta)$, y los radios vectores correspondientes a los extremos del intervalo $[\theta_1,\theta_2]$.

Si se trata de determinar la superficie que encierra una curva cerrada, se deberá tener en cuenta especialmente el intervalo a considerar para su determinación, y que dependerá de la expresión de la función que genera a la misma.

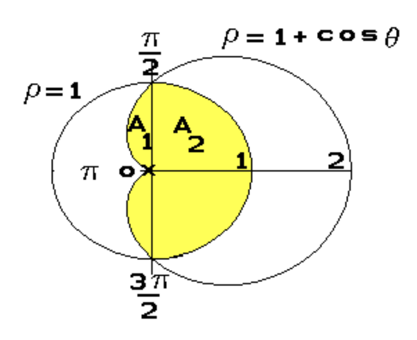
No necesariamente el recorrido de la curva cerrada debe tomarse efectuado por el intervalo $[0,2\pi]$, lo que puede conducir a un error, ya que este intervalo será válido, por ejemplo para una cardioide, pero si se trata de una rosa de número impar de pétalos, corresponderá considerar solamente $[0,\pi]$.

El cálculo de áreas entre curvas desarrolladas en coordenadas polares es similar al procedimiento en forma cartesiana, ya que se deben determinar los puntos de intersección para establecer el intervalo total a considerar.

Luego, se plantean la o las integrales que correspondan, resolviendo para cada intervalo, según el caso: "barriendo" una sola de las curvas, si corresponde, o por diferencia entre ambas, mayor y menor respectivamente. Es resumen, desde el punto de análisis conceptual, es idéntica la operatividad en los dos sistemas de coordenadas que desarrollamos.

Ejemplo: Sea determinar el área entre las curvas de las funciones:

AREA COMUN AL CIRCULO Y A LA CARDIOIDE



A = 2 (A1 + A2)

fig 9

círculo: $\rho = 1$;

cardioide: $\rho = 1 + \cos\theta$;

Representadas ambas en la fig.9.

La intersección se determina, como siempre, con la igualación de las ecuaciones de las curvas.

En este caso, ambas curvas se cortan para valores del ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3}{2}\pi$

El área puede calcularse siempre a partir de las simetrías que puedan existir, y que en coordenadas polares suelen ser más frecuentes.

En el caso propuesto, se obtiene el área A como el doble de la suma de A_1 más A_2.

A su vez, A_1 es la determinada por la cardioide para el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, mientras que A_2 corresponde al círculo en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, lo que determina, finalmente para obtener el área sombreada:

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^2\,d\theta\right] =$$

$$= \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right]$$

$$= \left[\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}(\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + (\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi - 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{4}\pi + 2$$

$$= \pi + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi - 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{4}\pi + 2 \text{ unidades de área.}$$

Volumen engendrado por un área plana al girar alrededor de una recta

El problema que se desea resolver como una nueva aplicación de la integral definida es el de calcular el volumen de revolución que se genera por la rotación de un área plana alrededor de una recta coplanar a la misma.

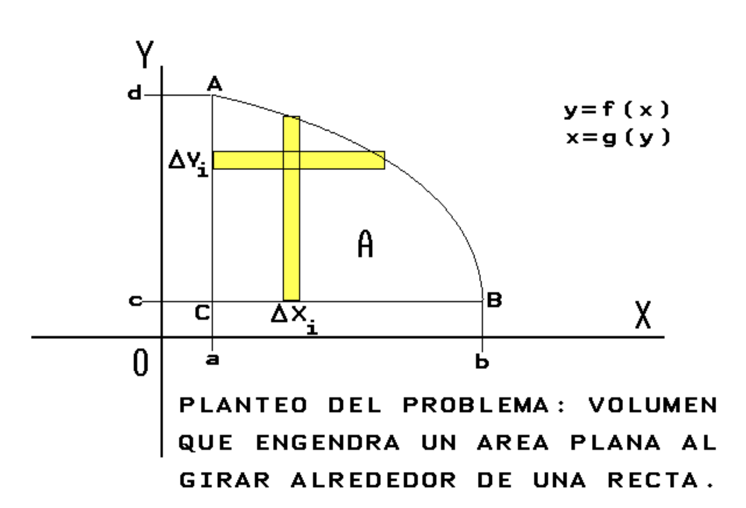


fig 10

Si bien la posibilidad de resolución del planteo comprende cualquier posición de la recta en el plano, solamente se desarrollará lo concerniente a rectas horizontales y verticales, paralelas a los respectivos ejes cartesianos.

En la figura 10 se presenta el esquema general del tema, que, conforme lo que se ha hecho con otras aplicaciones, considera inicialmente la partición del intervalo que corresponda, formando los rectángulos elementales.

La partición podrá, como siempre, efectuarse respecto de cualquiera de los ejes coordenados, con lo que se obtendrán rectángulos horizontales o verticales, referidos a su mayor longitud.

Para el cálculo del volumen de que se trate, se considerará el que engendra cada rectángulo para luego aproximarlo por la suma de los mismos.

Elegida una recta sobre la cual se hará el giro, que podrá ser horizontal o vertical, conforme la partición que se haga a lo largo de uno o de otro eje, resultarán los rectángulos paralelos o perpendiculares a la recta de giro.

Según se trate de una u otra alternativa, se resuelve el problema por distinto método para el cálculo del volumen.

fig 11 Metodo del DISCO

Método del Disco

Cuando los rectángulos resultantes de la partición son perpendiculares a la recta de giro se aplica el llamado método del disco.

Para la descripción del mismo, elegimos el giro alrededor del eje x, con lo que los rectángulos perpendiculares deben surgir de una partición sobre un intervalo en ese eje. (figura 11)

A su vez, los rectángulos pueden encontrarse separados del eje o linderos al mismo, según sea el caso.

El giro de esos rectángulos perpendiculares engendra un cuerpo cilíndrico de pequeño espesor respecto de sus radio o radios que puede asimilarse a un disco, y que da origen al nombre del método.

Según que el rectángulo esté contiguo o no a la recta, el cilindro será macizo o con un agujero concéntrico.

Los volúmenes elementales, con razonamiento similar al ya efectuado en otras aplicaciones serán:

Disco lleno: $\Delta V_i = \pi.(y_i)^2.\Delta x_i$

Disco hueco: $\Delta V_i = \pi.[(y_{2i})^2 - (y_{1i})^2].\ \Delta x_i$

Como siempre el volumen V será: $V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$,con mayor aproximación para n creciente.

Para el límite cuando n tiende a infinito y la norma a cero, será:

Para disco lleno, con área contigua el eje de giro: $V = \pi \int_a^b y^2\ dx$

Para disco hueco, con área separada del eje de giro: $V = \pi \int_a^b \left[\left(y_2\right)^2 - \left(y_1\right)^2 \right] dx$

Las expresiones obtenidas son válidas para el método del disco cuando el giro se produce alrededor del eje x o rectas paralelas al mismo.

Deben interpretarse cuidadosamente las mismas, teniendo en cuenta que en el caso de disco lleno, el valor de "y" es la distancia de la curva extremo del área a la recta de giro.

En caso de disco hueco, los valores de "y_2" e "y_1" son respectivamente las distancias de la curvas más alejada y más próximas a la recta de giro.

Si se trata de giro alrededor del eje y o de rectas paralelas al mismo, serán rectángulos horizontales, con intervalo e integración a lo largo del eje y, obteniéndose fórmulas similares a las precedentes.

Debe tenerse en cuenta que se deberán expresar las curvas de referencia respecto del eje y, como se hiciera en el cálculo de áreas.

Las expresiones equivalentes son:

Para disco lleno, con área contigua el eje de giro: $V = \pi \int_c^d x^2\ dy$

Para disco hueco, con área separada del eje de giro: $V = \pi \int_c^d \left[\left(x_2\right)^2 - \left(x_1\right)^2 \right] dx$

En resumen, si se desea aplicar el método del disco, para rotación alrededor del eje de abscisas o rectas paralelas al mismo, se deberá efectuar la partición en rectángulos verticales, con intervalo e integración a lo largo del eje x.

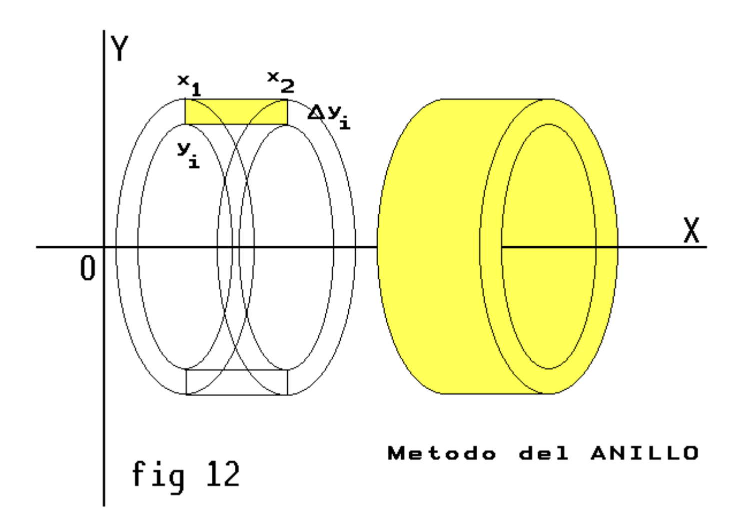
Si el giro es alrededor del eje de ordenadas o rectas paralelas al mismo, la partición requiere rectángulos verticales, obtenibles con intervalo e integración a lo largo del eje y.

Método del Anillo

Cuando los rectángulos resultantes de la partición son paralelos a la recta de giro se aplica el llamado método del anillo.

Si consideramos la rotación alrededor del eje de las abscisas, los rectángulos paralelos mencionados provienen ahora de un intervalo de integración y consecuente partición a lo largo del eje de ordenadas (figura 12).

El giro de los rectángulos elementales alrededor de una recta paralela a su mayor dimensión engendra un cuerpo que es un cilindro hueco de paredes delgadas respecto de los radios exterior e interior del mismo, que asimilado a un anillo, da este nombre al método.



El volumen elemental será el área de la base de ese cilindro hueco por la altura del mismo, en este caso la del rectángulo correspondiente.

En cuanto al área de la base, es la de una corona circular, que es:

Área corona circular = $\pi\,(R^2 - r^2) = \pi\,(R + r)(R - r) = 2\,\pi\,\frac{1}{2}\,(R + r)\,(R - r)$

En nuestro problema concreto, R - r es el elemento Δ_i de la variable correspondiente a la partición, $\Delta_i y$, en este caso, mientras que la semisuma $\frac{1}{2}\,(R + r)$, en virtud de la diferencia Δ entre los radios, puede considerarse aproximado el valor en un punto interior cualquiera, en este caso y_i.

Esta última aproximación es válida, ya que al considerar luego el límite cuando n crece indefinidamente, el Δ respectivo tiende a cero.

En resumen, el volumen elemental ΔV_i es el área de la corona por altura:

$$\Delta V_i = 2\,\pi\,y_i\,\Delta_i x.(x_2 - x_1)$$

Como siempre el volumen V será: $V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$,

y con el concepto de pasaje al límite cuando n tiende a más infinito, con la norma tendiendo a cero, y aplicando la definición de integral definida, resulta la expresión del método del anillo, cuando la rotación es alrededor del eje de las x.

$$V = 2\,\pi \int_c^d y\left[g_1(y) - g_2(y)\right] dy \qquad \text{(giro alrededor del eje x)}$$

Análogamente resulta una expresión simétrica si se trata de un volumen obtenido al girar el área alrededor del eje de ordenadas, correspondiendo a una partición de rectángulos verticales de un intervalo sobre el eje x.

$$V = 2\,\pi \int_a^b x\left[f_1(x) - f_2(x)\right] dx \qquad \text{(giro alrededor del eje y)}$$

Si se trata de giro alrededor de rectas paralelas a los ejes x ó y, en las expresiones anteriores, el sentido de "x" ó "y" es el de "distancia de cada rectángulo elemental al eje de giro".

Por su parte, la diferencia entre las funciones que limitan el área que gira son referidas siempre al eje respecto del que se efectúa la partición.

Ejemplo de aplicación de ambos métodos

Sea calcular el volumen engendrado por el área encerrada entre las gráficas de las ecuaciones: parábola: $y^2 = 4\,x$; recta: $y = 2\,x - 4$; recta: $y = 0$ (eje x). Area sombreada en la figura 13.

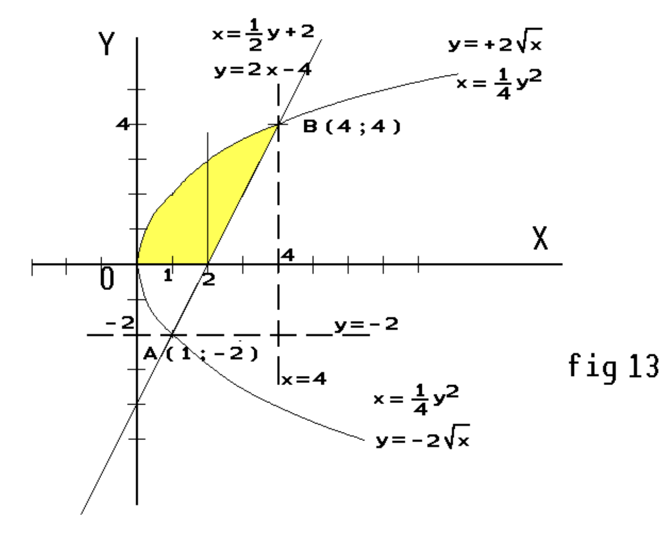


fig 13

al girar: a) alrededor del eje x ;
b) alrededor de x = 4

Se reitera que siempre será posible calcular el volumen que se busque por los métodos de disco o del anillo, indistintamente, con mayor o menor dificultad según las características del problema.

En este caso se resolverá cada uno de los incisos pedidos, planteando los dos métodos.

a) Giro alrededor del eje x

a_1) Utilizando el método del disco.

El método requiere rectángulos perpendiculares a la recta de giro, lo que determina partición sobre el eje x, en el intervalo [0,4].

En este caso, se debe a su vez distinguir dentro del mismo, que en [0.2] se trata de un disco lleno, mientras que en [2,4] es hueco.

En consecuencia, el volumen buscado, se obtiene a través de dos integrales definidas, en las que se tiene en cuenta cada circunstancia.

$$V_x = \pi \int_0^2 \left(2\sqrt{x}\right)^2 dx + \pi \int_2^4 \left[\left(2\sqrt{x}\right)^2 - \left(2x - 4\right)^2\right] dx$$

Omitiendo el desarrollo y cálculo de las integrales definidas, por ser sencillas, resulta:

$$V_x = 8\pi + \frac{40}{3}\pi \;;\; V_x = \frac{64}{3}\pi \text{ unidades de volumen}$$

a2) Utilizando el método del anillo.

Se corresponde el método con rectángulos paralelos a la recta de giro, con consecuente partición sobre el eje y, en el intervalo [0,4].

Se deben expresar las funciones en variable y, tanto para la recta como para la parábola, teniendo en cuenta que la recta es mayor que la parábola en el intervalo, resultando en definitiva una única integral ya que el área está comprendida entre las mismas curvas:

$$V_x = 2\pi \int_0^4 \left[\left(\frac{1}{2}y + 2\right) - \left(\frac{1}{4}y^2\right)\right] y\, dy$$, y resolviendo y calculando:

$$V_x = 2\pi\left(\frac{32}{3}\right) \;;\; V_x = \frac{64}{3}\pi \text{ unidades de volumen}$$

b) Giro alrededor de la recta x = 4

b1) Método del disco

Los rectángulos perpendiculares a la recta de giro que corresponden al método implican la integración a lo largo del eje y en el intervalo [0,4].

Se trata de un disco hueco a lo largo de todo el intervalo, correspondiendo los radios exterior e interior, respecto del eje de giro a la parábola y a la recta respectivamente.

El radio exterior es entonces igual a 4 menos "x de la parábola", mientras que el interior es 4 menos "x de la recta". Por lógica se deberá expresar cada función de x con la "y" como variable.

La integral definida que proporciona el volumen buscado es, entonces:

$$V_y = \pi \int_0^4 \left[\left(4 - \left(\frac{1}{4}y^2\right)\right)^2 - \left(4 - \left(\frac{1}{2}y + 2\right)\right)^2\right] dy$$, que, desarrollando y calculando resulta:

$$V_y = \frac{144}{5}\pi \text{ unidades de volumen}$$

b_2) Método del anillo

Ahora deben ser rectángulos verticales paralelos a la recta de giro, los que determinan el intervalo [0,4] a lo largo de la variable x.

En este caso, se presenta la necesidad de distinguir nuevamente entre [0,2] y [2,4], ya que son distintas las curvas que limitan el área cada caso: se debe considerar la parábola y el eje x en [0,2] , y la parábola y la recta en [2,4].

Lo anterior determina que el volumen quede expresado como la suma de dos integrales definidas correspondiente cada una al respectivo intervalo.

Aquí resulta la distancia "x" de la fórmula del disco, referida a la recta, por lo que es 4 - x, mientras que las integrales resultantes son:

$$V_y = 2\pi \int_2^4 (x-4).2\sqrt{x}\ dx + 2\pi\int_0^2 (x-4)\left[2\sqrt{x}-(2x-4)\right] dx$$, y desarrollando:

$$V_y = 2\,\pi\,(112\,\frac{\sqrt{2}}{15}) + 2\,\pi\,(\frac{72}{5} - 112\frac{\sqrt{2}}{15}) = 2\,\pi\left(\frac{72}{5}\right)$$

$$V_y = \frac{144}{5}\,\pi \text{ unidades de volumen}$$

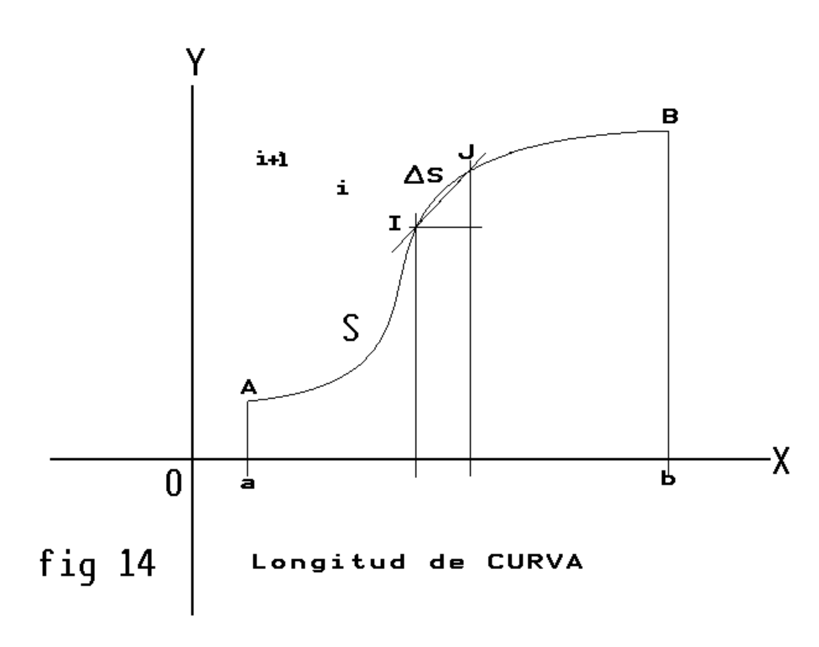
Lo desarrollado y obtenido por ambos métodos, lógicamente, permite ver que el resultado del volumen engendrado respecto de cada recta se calcula indistintamente con uno u otro procedimiento, debiendo elegirse la simplicidad operativa en cada caso.

Longitud de un arco de la gráfica de una curva

El nuevo problema que ahora se propone es el de determinar la longitud de una línea curva, correspondiente a un tramo de la gráfica de una función.

Supongamos que se trata del tramo entre los puntos A y B de la curva de la figura 14.

Este problema, podrá resolverse considerando intervalos de integración sobre cualquiera de los ejes coordenados, ya sea considerando las funciones y = f(x) ó x = g(y) según corresponda.



La metodología ya conocida requiere efectuar la partición del intervalo, en este caso el [a,b] en el eje x, y establecer los puntos sobre la curva correspondientes a cada subintervalo, uniendo con tramos rectos los puntos así determinados.

Se ha graficado únicamente el iésimo subintervalo, destacándose en el mismo el segmento IJ = $\Delta_i s$ conforme lo dicho.

La curva S es reemplazada por una poligonal de n tramos en correspondencia con la partición efectuada, con lo que la longitud S será aproximadamente la suma de las $\Delta_i s$ elementales.

La longitud de cada $\Delta_i s$ se obtiene de la aplicación de la relación pitagórica en el triángulo así formado (figura 15). Será, elementalmente:

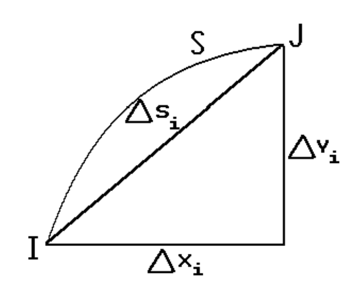


fig 15 Longitud aproximada del Elemento de Curva ΔS_i

$$\Delta_i s = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2}\,\Delta_i x$$

El valor total de la longitud buscada del arco, será aproximadamente: $S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta_i s$

Como siempre el valor aproximado pasa a ser el valor exacto buscado, al considerar el límite cuando n tiende a más infinito, y la norma a cero, con el concepto de la integral definida como límite de la sumatoria respectiva.

Como el límite del cociente $\dfrac{\Delta_i y}{\Delta_i x}$ es la derivada de y respecto de x, quedará:

$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i s$, y como integral definida: $S = \int_a^b \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}\,dx$

Si la integración se efectúa a lo largo del eje y, se obtiene la expresión simétrica equivalente:

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + \left[x'(y)\right]^2}\,dy$$

Es una aplicación de sencilla ejecución en cuanto al planteo de la integral definida a resolver, aunque generalmente la dificultad radica en la integración de la primitiva que se obtiene.

Ejemplo: Calcular la longitud de un arco de la sinusoide y = sen x, para lo cual será el intervalo [0,2π] (podría también usarse la simetría de la gráfica).

La función es y = sen x , con lo que y' = cos x, por lo que la longitud buscada es la que se obtiene de la integral a resolver: $S = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$ cuyo desarrollo y cálculo está fuera de nuestro objetivo pero mencionamos que su resultado es $S \approx 7{,}6404$

Series numéricas

El concepto de serie o de suma infinita parte del concepto de sucesión que ya hemos desarrollado: conjunto ordenado de infinitos términos, siendo cada uno de ellos un número real correspondiente a cada uno de los naturales. $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, \dots$

Sea para una sucesión cualquiera, como la indicada precedentemente el planteo de la siguiente metodología: se llama S_1 al primer término de la sucesión, luego S_2 a la suma de los dos primeros elementos, siguiendo con S_3 que es la suma de los tres primeros y así en adelante, de manera que S_n sea la suma de los términos 1 al n inclusive, continuando indefinidamente ya que el número total de los elementos de la sucesión es infinito.

Lo expresado, puede indicarse con la siguiente construcción:

Sea la sucesión $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, \dots$ y se efectúan las sumas parciales

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
....
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$
....

La anterior resulta ser una nueva sucesión, ya que precisamente cumple con la condición de conjunto ordenado y con sus infinitos elementos en correspondencia con cada número natural, con lo que queda perfectamente definida.

A esta sucesión se la llama (S_n), siendo la expresión de su término general: $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Interesa particularmente determinar el límite de esta sucesión, concretamente, conocer si el mismo es finito o no, y en consecuencia determinar el carácter de convergente o no de la misma.

Este límite se designa con S, y es precisamente:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = S: \text{ Serie o Suma Infinita}$$

Con el concepto que se ha formado esta sucesión, S, es la suma de los infinitos términos a_i y recibe el nombre de serie o suma infinita.

Como al hablar de series queda perfectamente entendido el concepto de la suma infinita de los términos de una sucesión, simplemente se indica el símbolo de sumatoria precediendo la expresión del término genérico que caracteriza la misma.

En esas condiciones, mientras no se indique específicamente lo contrario, se entenderá que la suma infinita comienza con el valor i = 1 con lo que equivale a interpretar que:

$$S = \sum a_i \quad \text{equivale a expresar} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$$

A partir de que los a_i pertenecen como se definió antes al conjunto de los números reales, las series que hemos definido expresan la suma de infinitos números reales y se llaman en consecuencia series numéricas.

Convergencia o Divergencia de las series numéricas.

Es fundamental distinguir el límite de la sucesión S_n, es decir, determinar el valor o resultado de la suma infinita o de la serie.

Si S es un valor finito, la serie es CONVERGENTE
Si S es un valor infinito, o no existe, la serie es DIVERGENTE

Normalmente es imposible obtener la expresión general de S_n, suma parcial de los n primeros términos a_i de la sucesión que da origen a la serie, siendo ello posible solamente en determinados casos particulares.

Es por ello que la determinación de la convergencia o divergencia de una serie numérica se determina por los llamados criterios, que se desarrollan más adelante.

No obstante, a título de ejemplos en que es posible obtener el resultado de la suma infinita, se indican las siguientes determinaciones sobre convergencia o no de algunas series particulares.

Sea, entonces, determinar la convergencia o divergencia de las series:

a) $S = \sum n = 1 + 2 + 3 + ... + n + ...$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 2$

$S_3 = 1 + 2 + 3$

....

$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

....

y será $S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty \Rightarrow$ S es divergente

b) $S = \sum (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^{n+1} + ...$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 - 1 = 0$

$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$

....

$S_n = 1$, si n es impar ; 0 si n es par

....

y será $S = \lim_{n \to +\infty} S_n =$ no $\exists \Rightarrow$ S es divergente

c) $S = \sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$

$$S_1 = \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

....

$$S_n = ... = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{con lo que } S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow S \text{ es convergente}$$

El concepto fundamental, de determinar si la suma es finita o infinita, no se modifica por el agregado o la quita de uno o varios números finitos, por lo que muchas veces, se comienza la serie para el valor n = 0 (si tiene sentido el término genérico) o desde cualquier natural o incluso desde algún entero negativo.

En los ejemplos anteriores, la serie a) podría haberse comenzado a sumar en 0, al igual que la b), mientras que para la c) no hubiera sido posible porque no existe a_0 para la misma.

Propiedades de las series numéricas.

Por tratarse la serie como el límite de una sucesión, son válidas las propiedades señaladas para operaciones entre límites de sucesiones, considerando ahora dos series $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$.

Se enuncian por ejemplo, estas propiedades, de sencilla interpretación y demostración:

1) Sean $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ convergentes y $c \in R$:

- La serie suma ($\Sigma\, a_n + \Sigma\, b_n$) es convergente y vale $\Sigma\, a_n + \Sigma\, b_n$
- La serie diferencia ($\Sigma\, a_n - \Sigma\, b_n$) es convergente y vale $\Sigma\, a_n - \Sigma\, b_n$
- La serie ($\Sigma\, c.a_n$) es convergente y vale $c.\Sigma\, a_n$

2) Sean $\Sigma\, a_n$ convergente y $\Sigma\, b_n$ divergente

- La serie suma ($\Sigma\, a_n + \Sigma\, b_n$) es divergente
- La serie diferencia ($\Sigma\, a_n - \Sigma\, b_n$) es divergente
- La serie ($\Sigma\, c.b_n$) es divergente

3) Sean $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ divergentes de distinto signo de infinito

- Nada puede asegurarse de la serie suma ($\Sigma\, a_n + \Sigma\, b_n$)

Series geométricas

Recibe el nombre de serie geométrica una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a.q^n = a + a.q + a.q^2 + a.q^3 + ... + a.q^n + ... \text{ (con } a \neq 0)$$

Este tipo de series se origina en un término general que resulta una progresión geométrica de razón q. (cada término es el anterior multiplicado por q).

Esta es una forma de series que permite determinar inmediatamente su convergencia, según sea el valor de la razón q.

Resulta también posible y muy sencillo calcular el valor de la serie cuando es convergente, con lo que es determinable el valor de la suma infinita de sus términos.

La convergencia o divergencia de las series geométricas queda caracterizada por el valor de la razón q, que se analizará para sus distintas alternativas.

Sea, entonces: $S = \sum_{n=0}^{\infty} a.q^n$

i) Si q = 1

$$S = a + a + a + ... + a + ...$$

$S_n = a + a + a + ... + a$, y por ser n + 1 sumandos: $S_n = (n+1)a$

entonces: $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (n+1).a = +\infty \Rightarrow$ S es divergente

ii) Si q = -1

$$S = -a + a - a + ... - a + ... a.(-1)^n + ...$$

$S_n = -a$, si n es impar ; 0, si n es par

con lo que: $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \text{no } \exists \Rightarrow$ S es divergente

iii) Si $q \neq 1$

(1) $S_n = a + a.q + a.q^2 + a.q^3 + ... + a.q^n$, multiplicando miembro a miembro por q

(2) $q.S_n = a.q + a.q^2 + a.q^3 + ... + a.q^{n+1}$, y restando miembro a miembro (2) de (1)

(1) – (2) : $(1-q).S_n = a.(1-q^{n+1})$, y despejando S_n (posible por ser $q \neq 1$):

$S_n = \dfrac{a.(1-q^{n+1})}{(1-q)}$ y como siempre pasamos al límite para tener la suma S

$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{a.(1-q^{n+1})}{(1-q)}$ que vemos es un límite que depende de q

Si $|q| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \infty \Rightarrow$ S es divergente

$$\text{Si } |q| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-q}, \ \exists \text{ finito} \Rightarrow \text{ S es convergente}$$

En resumen:

1)La serie geométrica es convergente únicamente si se cumple que $|q| < 1$.

2) La suma de una serie geométrica convergente vale $S = \dfrac{a}{1-q}$

Ejemplos: determinar la convergencia, y hallar su suma cuando sea posible, de las series geométricas:

a) $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$

1) Por tratarse de serie geométrica de razón $q = \frac{1}{2}$ es convergente

2) Su suma vale $S = \dfrac{a}{1-q} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

b) $S = \frac{1}{2} - 1 + 2 - 4 + 8 - 16 + ... + \frac{1}{2}(-1)^{n+1}2^n + ...$ S.

Es de razón q = - 2 por lo que es divergente. Su suma no es finita.

c) $S = 7 + 7\left(\frac{3}{4}\right) + 7\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 7\left(\frac{3}{4}\right)^3 + ... + 7\left(\frac{3}{4}\right)^n + ...$ la razón de la serie es $q = \frac{3}{4}$, y entonces es convergente

$$\text{Su suma es: } S = \frac{a}{1-q} = \frac{7}{1-\frac{3}{4}} = 28$$

Criterios para determinar la convergencia o divergencia de las series numéricas.

Se ha dicho antes que la determinación del término S_n que indica la suma parcial de los n primeros elementos de la sucesión (a_n) que caracteriza una serie numérica es en general imposible de expresar algebraicamente para un a_n cualquiera.

Es siempre posible como se dijo, para las series geométricas, y para algunos casos muy particulares como el ejemplo dado anteriormente de la serie $\sum \frac{1}{n\,(n+1)}$, pero no ocurre en la mayoría de las series a resolver.

En consecuencia, la determinación de la convergencia o divergencia de las series en general, no será posible resolverla como el simple límite de S_n cuando n tiende a más infinito, precisamente porque no es posible determinar la expresión de S_n.

Para resolver entonces la determinación que se busca, se aplican los criterios de convergencia o de divergencia de las series, que resuelven el tema, aunque no se pueda determinar a través de ellos el valor concreto de la suma infinita cuando la serie sea convergente.

Según las características de las series, y de la expresión del término genérico de la sucesión que la origina, convendrá elegir uno u otro de los criterios que se desarrollan a continuación.

Criterios

Criterio de Divergencia

Este criterio es de aplicación para cualquier serie numérica, con independencia de los signos continuos o alternados de sus términos. Sea la serie $S = \sum a_n$

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \text{ , entonces , la serie S es divergente}$$
$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \text{ , nada puede asegurarse sobre S}$$

Por la simpleza de su aplicación, este criterio es el que razonablemente conviene aplicar en primer lugar para analizar una serie.

Aunque ha sido expresado claramente, debe tenerse en cuenta que únicamente si se verifica la condición del límite distinto de cero, se asegura la divergencia de la serie.

Si el límite es cero, debe analizarse por otro camino, ya que esta última condición resulta necesaria, pero no suficiente para asegurar la convergencia de la serie.

Sea como ejemplo, aplicar el criterio de la divergencia para las series

a) $S = \sum \frac{n+10}{2-5n} : \lim_{n\to+\infty} \frac{n+10}{2-5n} = -\frac{1}{5} \neq 0 \Rightarrow \text{S es divergente}$

b) $S = \sum \frac{1}{n} : \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \text{el criterio no define}$

Series de términos alternados

Criterio de Convergencia de Leibnitz

Si la serie es de términos alternados, es decir que los signos de sus elementos so alternadamente positivos y negativos, es de aplicación el criterio de convergencia de Leibnitz.

Sea $S = \sum (-1)^n a_n$ una serie de términos alternados.

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} \left| (-1)^n a_n \right| = 0, \text{ entonces, S es convergente}$$

Es importante tener en cuenta que la verificación de este límite igual a cero es condición suficiente para la convergencia de una seria, únicamente si se trata de una serie de términos alternados.

Sea como ejemplo, aplicar el criterio de convergencia para las series de términos alternados:

a) $S = \sum (-1)^{n+1}\left(\frac{3}{4}n - 8\right) : \lim_{n \to +\infty} \left| (-1)^{n+1}\left(\frac{3}{4}n - 8\right) \right| = \infty \Rightarrow$ S es divergente

b) $S = \sum \left(-\frac{1}{n}\right)^n : \lim_{n \to +\infty} \left| \left(\frac{-1}{n}\right)^n \right| = 0 \Rightarrow$ S es convergente

Series de términos positivos

Se analiza ahora el caso de series cuyos términos son de signo positivo, entendiendo que el requerimiento es que por lo menos a partir de un cierto n se cumpla con esta condición.

Se entiende que los criterios que se desarrollarán son válidos si se trata de series de términos negativos con la misma aclaración precedente, ya que si $S = \sum a_n$ es una serie de términos negativos, es elemental que la serie $-S = \sum (-a_n)$ será de términos positivos.

Si se trata de analizar una serie de términos positivos, y la aplicación del criterio de divergencia no da respuesta por ser $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, se deberá utilizar alguno de los criterios que se pasan a desarrollar.

Criterios de comparación

Sean las series de términos positivos $\sum a_n$ y $\sum b_n$, para las que se verifica que, para todo n, tal que: $0 \le a_n \le b_n$, se verifica entonces:

a) Si $\sum b_n$ es convergente $\Rightarrow \sum a_n$ es convergente
b) Si $\sum a_n$ es divergente $\Rightarrow \sum b_n$ es divergente
c) Si $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0 \Rightarrow$ ambas series convergen o ambas series divergen

Estos criterios de comparación son sumamente prácticos para quienes tienen un abundante conocimiento sobre series convergentes o divergentes, para poder utilizar precisamente aquellas de resultado conocido en comparación con las que se quiere analizar.

Presenta en general dificultades si no se posee esa experiencia que haga ágil y práctica su utilización.

Este criterio de comparación, por el requerimiento del mismo, necesita otra u otras series para resolver sobre la convergencia o divergencia de la serie dada, mientras que los que siguen, analizan específicamente cada serie por si sola.

Criterio del cociente (de D'Alembert)

Sea la serie de términos positivos $S = \sum a_n$.

Se calcula el límite, cuando n tiende a infinito, del cociente formado por el término genérico a_n y el precedente a_{n-1}.:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = L$$

El valor del límite L así determinado caracteriza la convergencia o divergencia de la serie S:

- Si $L < 1 \Rightarrow$ la serie S es convergente
- Si $L > 1 \Rightarrow$ la serie S es divergente
- Si $L = 1 \Rightarrow$ el criterio no es aplicable

Criterio de la Integral

Sea la serie de términos positivos $S = \sum a_n$

Si se verifica que a_n es positivo y decreciente a partir de un cierto $N \in \mathbb{N}$, es decir, que se verifica para todo $n \geq N$ que $a_{n+1} \leq a_n$. Se forma en esas condiciones la integral impropia: $I = \int_N^{+\infty} a(x)\, dx$, donde a(x) es la función en variable real de la expresión del término genérico a_n.

Es esas condiciones, la serie $S = \sum a_n$, converge o diverge según sea respectivamente convergente o divergente la integral impropia I así expresada.

Criterio de la raíz (de Cauchy)

Sea la serie de términos positivos $S = \sum a_n$

Se calcula el límite, cuando n tiende a infinito, de la raíz de índice n del término genérico a_n.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

El valor de L determina la convergencia o divergencia de la serie S

- Si $L < 1 \Rightarrow$ la serie S es convergente
- Si $L > 1 \Rightarrow$ la serie S es divergente
- Si $L = 1 \Rightarrow$ el criterio no es aplicable

Criterio de Raabe

Sea la serie de términos positivos $S = \sum a_n$

Se calcula el límite, cuando n tiende a infinito, del producto del índice n por la unidad menos el cociente entre el término genérico y el precedente: $\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = L$

El valor de L también permite determinar la convergencia o divergencia de la serie S.

- Si L > 1 $\Rightarrow$ la serie S es convergente
- Si L < 1 $\Rightarrow$ la serie S es divergente
- Si L = 1 $\Rightarrow$ el criterio no es aplicable

La elección de uno u otro criterio de los enunciados depende de la expresión y complejidad del término genérico a_n, ya que en todos los casos se obtiene la respuesta a través de un límite o de una integral en donde interviene precisamente a_n.

En términos generales, se señala que el criterio del cociente presenta límites sencillos de calcular, aunque son frecuentes los casos en que el límite L da por resultado la unidad, con lo que el criterio no define la convergencia o no de la serie.

El método que no presenta indefiniciones y es de concreta aplicación es el de la integral, pero a su vez puede encontrarse en su aplicación con primitivas de difícil resolución, según cual sea la expresión de la función a(x) conforme sea a_n.

Resolver a título de ejemplo, la convergencia o divergencia de las series:

a) $S = \sum \frac{1}{n}$; Aplicando criterio del cociente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1 \Rightarrow \text{el criterio no define}$$

Aplicando criterio de la integral:

a_n decrece desde N = 1 ; a(x) = $\frac{1}{x}$ la integral impropia es:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{dx}{x} = \lim_{u\to+\infty} \ln x \Big|_1^u = \lim_{u\to+\infty} (\ln u - 1) = +\infty$$

Al ser la integral impropia divergente, $\Rightarrow$ la serie es divergente

Esta serie recibe el nombre de serie armónica, y, conocida su divergencia es útil para utilizar en algunos casos con el criterio de comparación.

b) $S = \sum \frac{n^2}{2^n}$ Aplicando criterio del cociente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2}{2^n}}{\frac{(n-1)^2}{2^{n-1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2\left(n^2 - 2n + 1\right)} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{S es convergente}$$

c) $S = \sum \left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n$ Aplicando el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2 + 2} = 0 < 1 \Rightarrow \text{S es convergente}$$

Como se ve, la aplicación concreta y práctica de los criterios de convergencia es conceptualmente sencilla, y se reduce al cálculo de un límite o de una integral impropia.

Series absolutamente convergentes y condicionalmente convergentes

Si se tiene una serie de términos alternados $S = \sum (-1)^n a_n$, ya se vio el criterio de Leibnitz para determinar su convergencia, ya que es condición suficiente que se cumpla: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Si la serie alternada es convergente, interesa determinar adicionalmente la convergencia o divergencia de serie términos positivos $S = \sum \left|(-1)^n a_n\right|$.

Si esta serie es a su vez convergente, se dice que la serie S alternada es absolutamente convergente.

Si en cambio esa serie resulta divergente, la serie S es condicionalmente convergente.

Obviamente esta clasificación es aplicable únicamente para el caso de que la serie alternada sea convergente, ya que si la alternada diverge, la de términos positivos también.

Ejemplo:

Sea la serie de términos alternados $S = \sum (-1)^n \frac{1}{n}$

Aplicando el criterio de Leibnitz es $S = \lim_{n\to+\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = 0 \Rightarrow \text{S en convergente}$

Por ello, es de aplicación determinar si esta convergencia es absoluta o condicional, a partir de la serie de términos positivos emanada de la dada: $S = \sum \frac{1}{n}$

Esta es la serie armónica, que, como ya se vio, es divergente.

Por lo tanto, la serie alternada $S = \sum (-1)^n \frac{1}{n}$ es una serie condicionalmente convergente

Series de potencias

Siempre con el concepto de suma infinita de términos de una expresión genérica, se define ahora el caso de una serie en la que el término general contenga la expresión $(x - a)^n$ siendo a un número real.

La suma de i = 0, hasta i = n, con n tendiendo a más infinito, resultará una suma infinita de potencias del binomio (x - a), pudiéndose expresarse en la forma general como: $S = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$, que recibe el nombre de serie de potencias de (x - a)

Si en particular el número real a es cero, la expresión es de la forma: $S = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, que se llama serie de potencias de x, y que no es más que un caso particular del anterior.

La característica que distingue estas series de las numéricas es que forma parte de la misma una variable. Son series de potencias, por ejemplo, las siguientes:

$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 (x+2)^n}{n!}$, que es una serie en potencias de (x + 2), con “a” = - 2

$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 2n}$, que es una serie en potencias de x, con “a” = 0

Evidentemente para cada valor de la variable se está en presencia de una serie numérica, o dicho de otra forma, dada una serie de potencias, hay infinitas series numéricas expresables a partir de ella, tantas como valores se puedan asignar a la variable.

Desde ya que, como siempre, el objetivo es determinar la convergencia o divergencia de la serie, y en general es lógico que, a partir de una serie de potencias, habrá determinados valores de la variable que forman series numéricas que convergen, mientras que para otros valores, las series divergen.

Interesa determinar, entonces, los intervalos de la variable real que hacen que converja la serie de potencias dada.

El conjunto de los valores de la variable para los cuales la serie de potencias es convergente, se llama Campo de Convergencia de la serie de potencias, y se simboliza "C.C.".

Toda serie de potencias es, desde ya, convergente en el valor de "a" correspondiente al binomio (x - a), con lo que trivialmente, existe siempre un valor de la variable para el cual la convergencia está asegurada.

También hay series de potencias convergentes para todo valor de la variable, con lo que el campo de convergencia es el conjunto R, asegurando entonces suma finita para cualquier x.

Por lo dicho, el campo de convergencia de las series de potencias podrá estar compuesto desde un único valor de la variable, hasta el conjunto R, y, por supuesto, podrá ser algún intervalo real que llamaremos "I" y se verificará: $I \subseteq R$.

El campo de convergencia se determina, aplicando el criterio del cociente para el valor absoluto, lo que equivale a:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|.\left|(x-a)\right| \text{ ó } = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|.\left|x\right|$$

En todos los casos, para las series de potencias de (x - a), o en potencias de x , se estará en presencia del límite de un producto:

El primer factor resultará en definitiva un número finito, A, mientras que el segundo será invariablemente de la forma $\left|x-a\right|$ ó $\left|x\right|$, con lo que tendrá alguna de las formas: $L = A\left|x-a\right|$ ó $L = A\left|x\right|$.

El criterio del cociente asegura la convergencia si L < 1, y es inmediato deducir que el campo de convergencia será el intervalo I que verifique la condición: $\left|x-a\right| < \frac{1}{A}$ ó $\left|x\right| < \frac{1}{A}$

Esa condición determina entonces un intervalo abierto. Para los valores en que el resultado es mayor que 1, obviamente la serie es divergente.

Queda finalmente para determinar para cada uno de los extremos del intervalo abierto, si la serie converge o diverge, lo que se verifica formando las series numéricas correspondientes.

Lo expresado es válido para cuando el límite del primer factor, que se ha llamado A es finito, y no nulo.

Particularizando, si A, es cero : A = 0, cualquier valor de x cumple la condición de que L es menor que 1, con lo que el campo de convergencia es el conjunto R.

Si, en cambio, A tiene límite infinito, el campo de convergencia será un punto únicamente: precisamente el valor de "a".

Ejemplo de cálculo de campo de convergencia de una serie de potencias:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}.x^n}{n} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ... +$$

Aplicando el criterio del cociente al valor absoluto:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^n}{n}}{\frac{x^{n-1}}{n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n-1}{n}\right|.\left|x\right| = 1.\left|x\right|,$$

La condición es, entonces $\left|x\right| < 1$, lo que determina como intervalo de convergencia los valores del intervalo abierto: x ∈ (-1,+1). Pero queda por determinar que ocurre si la variable toma

los valores extremos del intervalo, lo que equivale a: $|x| = 1$, que es cuando el criterio del cociente no define la convergencia. Para ello, se deben formar las series numéricas con x = - 1 y x = + 1

Para x = - 1: $S = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots - \frac{1}{n} \dots$

que es una serie de términos negativos, por lo que - S es de términos positivos: $-S = +1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{n} \dots$

y ésta es precisamente la serie armónica cuya divergencia ya se determinó, con que el extremo inferior - 1 $\notin$ C.C.

Para x = + 1: $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots + \frac{(-1)^n}{n} + \dots$

que es una serie de términos alternados, es de aplicación el criterio de Leibnitz, que determina la convergencia de la misma, por lo que el extremo superior + 1 $\in$ C.C.

Las determinaciones en ambos extremos, establecen que el campo de convergencia es:

$$\text{C.C.} = (-1, +1] \text{ , o sea C.C.} = \{x \,/\, -1 < x \leq +1\}$$

Desarrollo de Funciones en Series de Potencias

Es posible efectuar el desarrollo de una función f(x) expresada como una serie de potencias, en ciertas condiciones.

Sea la función f (x) que admite derivadas sucesivas de orden infinito, para un punto a perteneciente a su dominio.

La misma puede expresarse entonces como una serie de potencias del binomio (x - a), siendo válida la igualdad entre la función y la suma infinita así obtenida, para todo x perteneciente al dominio de la función y al campo de convergencia de la serie.

Los coeficientes numéricos de la serie de potencias estarán dados por la expresión de la función y sus sucesivas derivadas consideradas en el punto "a" correspondiente al binomio base de las potencias respectivas, dividido por el factorial en igual orden.

En otras palabras, la expresión de la serie a obtener, es la correspondiente al desarrollo del polinomio de la función en potencian de (x - a), de grado n, ahora cuando n es infinito.

La expresión es de las formas siguientes:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$: que es el Desarrollo en Serie de Taylor

y, si como caso particular, a = 0:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$: que es el Desarrollo en Serie de Mac Laurin

Ambas expresiones de los desarrollos en serie son válidas para todo valor de la variable x perteneciente al dominio de la función f y al Campo de Convergencia de la serie de potencias obtenida a partir de la misma.

La expresión de los desarrollos justifica la condición requerida para la función f, de que existan todas sus derivadas sucesivas, y que estén definidas en el punto a correspondiente.

Ejemplos:

a) Desarrollar la función f (x) = sen x en serie de potencias de (x - π)

Para ello, se desarrollan las derivadas sucesivas, hasta encontrar la ley de la derivada enésima, y se calculan sus valores para x = π.

$f(x) = \text{sen } x$ $\qquad f(\pi) = 0$
$f'(x) = \cos x$ $\qquad f'(\pi) = -1$
$f''(x) = -\text{sen } x$ $\qquad f''(\pi) = 0$
$f^{(3)}(x) = -\cos x$ $\qquad f^{(3)}(\pi) = +1$
$f^{(4)}(x) = \text{sen } x$ $\qquad f^{(4)}(\pi) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos x$ $\qquad f^{(5)}(\pi) = -1$

De esta manera, la función, expresada como serie de Taylor, es:

$$\text{sen } x = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \frac{(x-\pi)^5}{5!} + \frac{(x-\pi)^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

b) Calcular el campo de convergencia de ese desarrollo. Lo hacemos con el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}}{\dfrac{(x-\pi)^{2n-3}}{(2n-3)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(2n-1)!}{(2n-3)!}\right|.\left|x^2\right| = 0.\left|x^2\right| < 1\ \forall x$$

Por lo que el campo de convergencia C.C. es el conjunto R.

c) Desarrollar la función $f(x) = e^x$ en serie de Mac Laurin

La función y sus sucesivas derivadas en x = 0 resultan iguales:

$f(x) = e^x$ $\qquad f(0) = 1$
$f'(x) = e^x$ $\qquad f'(0) = 1$
$f''(x) = e^x$ $\qquad f''(0) = 1$
....
$f^{(n)}(x) = e^x$ $\qquad f^{(n)}(0) = 1$

Con lo que el desarrollo de la función en serie de Mac Laurin es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

d) Determinar el campo de convergencia del desarrollo anterior.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\right|.\left|x\right| = 0.\left|x\right| < 1 \ \forall x$$

Con lo que la serie es convergente para todo R. C.C. ≡ R

Ello indica que la expresión del desarrollo obtenido en c) es válida para todo valor de la variable, lo que permite calcular el número e, como ejemplo, con la aproximación que se desee.

Sea, como ejemplo:

e) Calcular el número e con 6 decimales exactos

Para ello, habrá que considerar la expresión para x = 1:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$$

$$e = 1,0000000000 + 1,0000000000 + 0,5000000000 + 0,1666666667 + 0,0416666667 + 0,0083333333 + 0,0013888889 + 0,0001984127 + 0,0000248016 + 0,0000027557 + 0,0000002756 + 0,0000000251 =$$

$$\boxed{e = 2,718281 ... \text{ con las seis cifras exactas.}}$$

TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

TIPO de FUNCION	FUNCION	DERIVADA
Constante	$y = C$	$y' = 0$
Identidad	$y = x$	$y' = 1$
Propiedad suma o esta	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
Propiedad producto	$y = u.v$	$y' = u'.v + u.v'$
Propiedad cociente	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$
Función compuesta	$y = f(u)$; $u = g(x)$ $y = f\left[g(x)\right]$	$y' = f'(u).g'(x) = f'\left[g(x)\right].g'(x)$
Potencial $n \in R$	$y = x^n$	$y' = n.x^{n-1}$
Exponencial $a > 0$; $a \neq 1$	$y = a^x$	$y' = a^x.\ln a$
Exponencial base e	$y = e^x$	$y' = e^x$
Logarítmica base $a > 0$; $a \neq 1$	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}.\log_a e$
Logarítmica base e	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
Trigonométrica	$y = \text{sen } x$	$y' = \cos x$
Trigonométrica	$y = \cos x$	$y' = -\text{sen } x$
Trigonométrica	$y = \text{tg } x$	$y' = \sec^2 x$
Trigonométrica	$y = \text{cotg } x$	$y' = -\text{cosec}^2 x$
Trigonométrica	$y = \sec x$	$y' = \sec x.\text{tg } x$
Trigonométrica	$y = \text{cosec } x$	$y' = -\text{cosec } x.\text{cotg } x$
Trigonométrica inversa	$y = \text{arc sen } x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Trigonométrica inversa	$y = \text{arc cos } x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Trigonométrica inversa	$y = \text{arc tg } x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
Trigonométrica inversa	$y = \text{arc cotg } x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
Trigonométrica inversa	$y = \text{arc sec } x$	$y' = \frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}$
Trigonométrica inversa	$y = \text{arc cosec } x$	$y' = -\frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}$
Hiperbólica	$y = \text{Sh } x$	$y' = \text{Ch } x$
Hiperbólica	$y = \text{Ch } x$	$y' = \text{Sh } x$
Hiperbólica	$y = \text{Th } x$	$y' = \text{Sec}^2\text{h } x$
Hiperbólica	$y = \text{Cot h } x$	$y' = -\text{Cosec}^2\text{h } x$
Hiperbólica	$y = \text{Sec h } x$	$y' = -\text{Sec h } x.\text{Th } x$

TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

Hiperbólica	y = Cosec h x	$y' = -\text{Cosec h } x.\text{Coth } x$
Hiperbólica inversa	y = ArgSh x	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
Hiperbólica inversa	y = ArgCh x	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ con $x > 1$
Hiperbólica inversa	y = ArgTh x	$y' = \frac{1}{1-x^2}$ con $\lvert x\rvert < 1$
Hiperbólica inversa	y = ArgCoth x	$y' = \frac{1}{1-x^2}$ con $\lvert x\rvert > 1$
Hiperbólica inversa	y = ArgSec h x	$y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ con $0 < x < 1$
Hiperbólica inversa	y = ArgCosec h x	$y' = -\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}}$ con $x \neq 0$

PLAN DE DICTADO

CAPITULO I: Funciones de una variable.- (14 horas)

CAPITULO II: Límites y Continuidad.- (18 horas)

CAPITULO III: Derivadas.- (12 horas)

CAPITULO IV: Aplicaciones de la Derivada.- (12 horas)

CAPITULO V: Sucesiones.- (4 horas)

CAPITULO VI: Integrales.- (12 horas)

CAPITULO VII: Aplicaciones de la Integral.- (10 horas)

CAPITULO VIII: Series.- (8 horas)

- OBJETIVOS -

Proporcionar las nociones necesarias de funciones de una variable para su posterior aplicación en el Cálculo Diferencial e Integral.
Suministrar los conceptos fundamentales del Análisis en una variable.
Utilizar estos conceptos para el análisis y resolución de problemas matemáticos y de otras áreas del conocimiento.
Conocer y analizar los conceptos de series numéricas y de potencias, con sus aplicaciones en desarrollo de funciones.-

PROGRAMA ANALITICO

CAPITULO I: FUNCIONES DE UNA VARIABLE.- Función. Definición. Dominio, rango e imagen. Gráfica de una función. Funciones uniformes y relaciones multiformes. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Función inversa. Crecimiento y decrecimiento. Funciones monótonas. Paridad. Igualdad de funciones. Algebra de funciones. Composición de funciones. Aplicación de los conceptos a las funciones elementales. Funciones expresadas en forma paramétrica. Funciones en coordenadas polares.-

CAPITULO II: LIMITES Y CONTINUIDAD.- Límite finito. Definición. Límites finitos de funciones elementales. Propiedades de los límites. Algebra de los límites. Existencia del límite. Límites laterales. Límites infinitos. Relaciones entre límites finitos e infinitos. Límites cuando x $\pm\infty$. Límites indeterminados. Infinitésimos. El número e como límite. Asíntotas lineales a una gráfica. Límites de la forma : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ Definición de función continua en un punto y en un intervalo. Discontinuidades y sus clases. Algebra de las funciones continuas. Continuidad de las funciones compuestas. Continuidad lateral. Teoremas sobre las funciones continuas. Aplicaciones e interpretaciones de los teoremas.-

CAPITULO III: DERIVADAS.- Introducción al concepto de derivada: tangente en un punto a una curva, velocidad de un móvil. Definición formal. Función derivada. Recta tangente y recta normal. Funciones derivadas de las funciones elementales. Existencia de la derivada. Derivadas laterales. Derivadas infinitas. Derivabilidad y continuidad. Algebra de las funciones derivables. Derivación de funciones compuestas, Regla de la Cadena. Derivación logarítmica. Derivadas de las funciones inversas. Derivación de orden superior. Derivación de funciones expresadas en forma implícita. Teoremas sobre las funciones derivables, demostración, interpretación, aplicaciones y corolarios de los teoremas. Derivadas de funciones expresadas en forma paramétrica. Derivación de funciones en coordenadas polares.. Diferencial de una función, definición, interpretación geométrica y aplicaciones. Derivación gráfica.-

CAPITULO IV: APLICACIONES DE LA DERIVADA.- Aplicaciones geométricas y físicas. Crecimiento y decrecimiento de funciones. Puntos críticos. Extremos. Máximos y mínimos relativos. Condiciones necesarias y condiciones suficientes para su existencia. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. Estudio completo de la gráfica de una función. Límites indeterminados, Regla de L'Hôpital. Aproximación de funciones por Fórmulas de Taylor y Mac Laurin.-

CAPITULO V: SUCESIONES.- Sucesiones numéricas. Sucesiones acotadas. Límite de sucesiones. Sucesiones convergentes y divergentes. Sucesiones monótonas. El número e como límite de una sucesión.-

CAPITULO VI: INTEGRALES.- Función primitiva. Integral indefinida. Propiedades. Teoremas. Significado geométrico. Métodos de integración: inmediatas, sustitución, por partes, irracionales, que contienen polinomio de segundo grado, fracciones racionales, trigonométricas. Integral definida. Definición. Propiedades. Teorema del valor medio del cálculo integral. Teorema fundamental del cálculo y sus corolarios. Regla de Barrow. Integrales impropias. Integración gráfica.-

CAPITULO VII: APLICACIONES DE LA INTEGRAL.- Areas. Longitud de arco de curva. Area de superficies de revolución. Volumen de un sólido de revolución. Fórmulas expresadas en coordenadas cartesianas, en forma paramétrica y en coordenadas polares. Momentos de primer y segundo orden. Centro geométrico.-

CAPITULO VIII: SERIES.- Definición de serie o suma infinita. Convergencia y divergencia. Series geométricas. Serie armónica. Criterio de divergencia. Series de términos positivos. Criterios de comparación. Criterios del cociente, de la integral, de la raíz y de Raabe. Series de términos alternados. Criterio de Leibnitz. Series absoluta o condicionalmente convergentes. Series de potencias. Campo de convergencia. Desarrollo de funciones en serie de Taylor y de Mac Laurin.-

BIBLIOGRAFIA GENERAL Y DE CONSULTA

THOMAS, G.B. - CALCULO INFINITESIMAL Y GEOMETRIA ANALITICA - Ed. Aguilar, Madrid.-

APOSTOL, T. - CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL - Ed. Reverté, Barcelona.-

APOSTOL, T. - ANALISIS MATEMATICO - Ed. Reverté, Barcelona.-

PISKUNOV, N. - CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL - Tomo I - Ed. Mir, Moscú.-

REY PASTOR, J., PI CALLEJA, P., TREJO, C. - ANALISIS MATEMATICO - Tomo I - Ed. Kapelusz, Buenos Aires.-

SADOSKY, M., GUBER, R. - CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL - Tomos I y II - Ed. Alsina, Buenos Aires.-

RABUFFETTI, H. - INTRODUCCION AL ANALISIS MATEMATICO - Tomo I - Ed. El Ateneo, Buenos Aires.-

SPIVAK, M. - CALCULUS - Volumen I y II - Ed. Reverté, Barcelona.-

AYRES, F. - CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL - Ed. Mac Graw Hill, México.-